TECHE
UDINE

MANOSCRITTI

FONDO PRINCIPALE

Manoscritto n. P_MSS_1028_II

Nel Fondo Principale sono confluiti la maggior parte dei lasciti manoscritti pervenuti alla Biblioteca Civica «Vincenzo Joppi» nel corso del tempo: si tratta perciò di un fondo composito nel quale è possibile trovare manoscritti di argomento liturgico, scientifico, giuridico, botanico e altro.

Collocazione:

Biblioteca Civica "Vincenzo Joppi", Udine
https://www.techeudine.it/fondo-principale
https://www.sbhu.it/

RIC·CO.
GIORD.
DELLE
CORDE
ELAST.
PAR·II.

II

1028

BIBLIOTECA COMUNALE
VINCENZO JOPPI
UDINE
N. 1028
II

Appendice alla [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] Carlo [illegible]
[illegible]

Appendice allo Schediasma IV.
da collocarsi al fine della
Prima Parte
Delle Corde ovvero
Fibre Elastiche.

Appendice allo Schediasma IV.

I. Nell'ultimo numero dello Schediasma IV. ho affermato, che se la corda vibrandosi un solo suono produce, dee prendere una delle figure da me determinate: ma se, come realmente succede, col suono principale 1 della corda intera sono misti i suoni 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, &c delle sue parti aliquote; si compongono insieme i moti proprj delle figure 15, 16, 17, &c, ed innumerabili nuove figure ne nascono. Essendomi stata richiesta una distinta dichiarazione di questa composizione di figure, e di moti, ho presa risoluzione di effettuar ciò nella presente Appendice: tanto più che il chiarissimo Signor Luigi de la Grange ingenuamente confessa (a) di non essere ancora giunto a poter spiegare la multiplicità dei suoni armonici, che si fanno sentire battendo una sola corda.

II. Conciossiachè le nostre figure siano infinite, m'ingegnerò a mostrare la combinazione delle due più semplici; riuscendo poi facile il passare alle più composte. E primieramente si mescano insieme nella figura 18. le due curve BDZaDA, BGCaGA delle figure 15, 16, a cui si adatta la corda AB, quando trema intera, o divisa in due parti eguali. L'ordinata HD corrispondente al punto H preso ad arbitrio si continui verso E quanto basta, e tagliata De = HG, pel punto e, e per altri infiniti similmente determinati si faccia passare la curva BEZaEA, che sarà quella, a cui si conforma la corda nel primo de' suoi stati di quiete.

Passata la quarta parte del tempo impiegato dalla corda che oscilla intera in una vibrazione, la stessa corda, che si vibra come divisa in due parti eguali, ha compiuta una mezza oscillazione, ed in questo istante si accomoda ad una figura analoga alla BDZaDA. Dopo mezza vibrazione della corda intera, ed una vibrazione della corda bipartita, prende essa la figura BGCaGA ma collocata negativamente. Torna poscia a coincidere con una figura analoga alla BdfadA, posciachè sono scorse tre quarte parti del tempo di una vibrazione della corda intera, e la corda divisa in due ha fatte tre mezze vibrazioni.

Finalmente

(a) Miscellanea Philosophico-Mathematica Societatis privatæ Taurinensis Tom. I. pag. 109.

Finalmente terminata una vibrazione della corda intera, e due vibrazioni della corda distribuita in due parti eguali, onde essa corda sia pervenuta al secondo stato di quiete, avrà la stessa formata della figura Befr a A nascente dalla stabilire de = HG, o pure dal girare la curva BeZ z e A prima intorno l'asse CZ, e poi attorno l'asse BA.

Questa proprietà, che nei due stati di riposo la curva si alternino, di modo che sia BeZ z e A = A e z f e B, è comune a tutti quei casi, nei quali col suono 1 della corda intera si accoppia uno, o più suoni espressi dai numeri pari 2, 4, 6, 8, &c. Avvertasi inoltre, che nella stessa supposizione i punti della corda non giungono alla linea retta BCA nel medesimo istante; imperciocchè quando il punto Z è pervenuto in C, il punto e è trascorso oltre il punto H per uno spazio = HG, ed al contrario il punto z e per giungere sino in zH resta da passare uno spazio = zHG.

III. Mi innoltro alla costruzione della curva, alle quali nel primo istante della oscillazione dee accomodarsi la corda, quando congiuntamente produce i suoni 1, 3, che le competono, secondochè si vibra intera, o divisa in tre parti eguali. Colla curva (fig. 39, 40) BDZzDA della figura 15 si unisca la curva BGS2G2S3GA della figura 17, che può avere due differenti posizioni, come nelle citate figure 39, e 40, e pel punto qualunque H rizzata l'ordinata HD, che si continui se fa bisogno, si tagli De = HG, ed il punto e, ed altri infiniti similmente determinati apparterranno alla curva BeN2e2N3eA, di cui ci siamo proposta la descrizione.

Dopo il tempo di una semivibrazione delle tre parti eguali della corda, si sarà essa conformata ad una figura analoga alla BDZzDA. Compiuta mezza vibrazione della corda intera, e tre mezze vibrazioni delle sue terze parti, si troverà nella linea retta BCA; e perciò tutti i suoi punti nello stesso istante alla mentovata linea pervengono: il che generalmente addiviene, qualora col suono 1 della corda totale sono misti i suoni 3, 5, 7, &c. della medesima corda divisa in uno, o più numeri impari di parti eguali. Assume poscia nuovamente la figura analoga alla BdfrdA, passato che sia il tempo di $\frac{5}{2}$ vibrazioni della corda compartita in tre porzioni eguali, e per ultimo dopo una vibrazione della corda intera, e tre delle sue terze

parti

parti, giunge essa corda al secondo stato di quiete, avendo presa la figura B e N h e M o A uguale alla B e H n e N d e A. Costruendo perciò sempre [illegible], ogni volta che col suono i soliti [illegible] suoni espressi da' numeri impari 1, 3, 5, ec.

IV. [illegible] colle due curve della figura 139, 140 si compongono le curve (fig. 34.) B e h n e A, B e f n e A atte a rendere la mistura di suoni [illegible]; e così colle [illegible] ultimamente nominate, e colla curva della figura 17 si formarono le curve, disposte le quali si sentiva l'aggregato di suoni 1, 2, 3. Coll'accrescere [illegible] queste curve, e di quella, a cui si adatta la corda divisa in quattro parti eguali, si [illegible] curve, alle quali deve conformarsi la corda, perchè da produrre unitamente i suoni 1, 2, 3, 4; e in sì fatta guisa si potè far passaggio alla descrizione delle curve sempre più composte, che un maggior numero de' suoni [illegible] con quello della corda totale [illegible] $\frac{1}{2}$ [illegible]

V. Trovata [illegible] sempre unito col suono della corda intera quello delle sue parti aliquote, vediamo presentemente cosa succeda, quando si congiungono insieme i suoni di due o più parti aliquote.

Si accoppino nella figura le due curve B D e G e D A, B G S n e 2 5 3 G A delle figure 16, e 17; e fatte D C = H G, si descriva col solito metodo la curva B e N n e G n N 3 e A, a cui conformata la corda, si troverà bipartita, e tripartita, e produrrà i suoni 2, 3. Nello istante, in cui la corda divisa per metà ha fatto una vibrazione, la stessa corda partita in tre membri eguali ne ha compiuta una e mezza, e si trova formata della figura B 2 C n D A capovolta intorno all'asse A B. Ora questo non è uno stato di quiete; perchè la corda in tre porzioni distribuita si muove, essendo alla metà di una sua vibrazione. Acciocchè ritorni allo stato di quiete, egli è di uopo, che la corda si sia vibrata due volte come divisa in due parti, e tre volte come scompartita in tre membri, impiegandovi [illegible] il tempo di una vibrazione della corda intera, ch'[illegible] per [illegible] Benpensat, incontro è formata esta corda della figura 42, che separo dalla 41 per evitare la confusione.

VI. Il passare frattanto da uno stato all'altro di quiete, è lo stesso che il fare una vibrazione, e rendere il suono corrispondente al tempo speso nel detto passaggio: ma al tempo [illegible]

relativo

rilattivo il suono 2 convenientè alla corda intera; dunque il sentire dei due suoni 2, 3 proprj della corda bipartita, e tripartita genera il suono 1 competente alla corda intera. Lo stesso effetto producono i suoni di tutte quelle due, o più parti aliquote, che sono dinotati da numeri fra loro primi; perchè in tutte queste circostanze si richiede il tempo 1, per accadere che la corda ritorni allo stato di quiete [illegible]

Che se si congiungessero due, o più suoni di tali parti aliquote, che fossero dinotati da numeri non fra loro primi, ne nascerebbe il suono uguale alla loro massima comune misura; per ragione che nel tempo d'una vibrazione di questo suono la corda passa da uno stato all'altro di quiete. Trovisi la corda divisa in 4, 6, 8 parti eguali, e rendasi i suoni 4, 6, 8; accadendo che riacquisti lo stato di quiete dopo due vibrazioni delle parti $\frac{1}{4}AB$, tre delle parti $\frac{1}{6}AB$, e quattro delle parti $\frac{1}{8}AB$, cioè a dire nel tempo $\frac{1}{2}$ corrispondente alle vibrazioni delle parti $\frac{1}{2}AB$, ne risulterà il suono 2 massima comune misura dei suoni 4, 6, 8.

Si avvertirà per altro, che se la massima comune misura fosse uguale al suono più grave, non nascerebbe nuovo suono; imperciocchè la corda ritornerebbe allo stato di riposo nel tempo di una vibrazione della parte aliquota maggiore, che rende il detto suono più grave. Suppongo che per esempio si unissero nella medesima corda i suoni 2, 4, 6 convenienti alle parti aliquote $\frac{1}{2}AB$, $\frac{1}{4}AB$, $\frac{1}{6}AB$, la massima comune misura dei quali pareggia il suono più grave 2, riacquisterà essa corda lo stato di quiete nel tempo di una vibrazione delle parti aliquote $\frac{1}{2}AB$, e non si genererà nuovo suono.

Sembrami, che la riflessione del ritorno della corda da uno stato all'altro di quiete rischiari viè più la mia spiegazione fisica della sperienza dell'altre volte lodato Signor Giuseppe Tartini contenuta nei numeri XXV, XXVI, e XXVII dello Schediasma IV; intendendosi per tal mezzo con maggior evidenza, qualmente i suoni espressi da numeri fra loro primi di due parti aliquote producano il suono della corda totale.

VIII. [illegible] della corda [illegible],

VII. Opporrà qualcuno, che la spiegazione del terzo suono sarebbe chiarissima, se le corde aeree, che portano i suoni all'orecchio, si vibrassero come le solide: ma essendo le oscillazioni loro di indole affatto diversa, non si sa capire in qual modo ad essa la spiegazione si adatti. Nelle corde solide tutte le particole principiano, e finiscono nello stesso istante le vibrazioni, che si fanno per la direzione normale alla loro lunghezza; e quindi ogni volta che le corde suddette si trovano in uno stato di quiete, questa proprietà è comune a tutte le particole, onde sono composte. I punti estremi rimangono immobili, e ciò succede ancora in alcuni punti di mezzo, quando restano divise in parti eguali, ed il riposo di essi punti non è turbato dall'accoppiamento di qualche altra maniera di oscillazione. Al contrario le particole delle corde fluide danno tanto più tardi cominciamento e fine alle loro vibrazioni per la direzione della lunghezza, quanto sono più rimote dal corpo sonoro, né se questo continua a vibrarsi, si effettua in esse corde il transito da uno stato all'altro di quiete, da cui nelle corde solide dipende l'origine del terzo suono. In oltre non contengono punto alcuno, che prima, o dopo non muovasi; e per conseguenza dalla quiete dei punti estremi (fig. 41.) A, B, e dal moto di qualunque punto medio non si può dedurre, come nel numero XXVI. dello Schediasma IV., il moto della corda totale AB, ed il suono ad essa conveniente.

Per ben intendere qualmente la mia spiegazione all'aria si accomodi, egli è d'uopo riflettere, che le particole aeree ugualmente lontane dal centro sonoro principiano, e finiscono nel medesimo istante le oscillazioni. Tra sì fatte particole io considero quelle, che nel sensorio fanno impressione. Per opera dei suoni n, N espressi da numeri fra loro primi abbiano esse congiuntamente concepito le vibrazioni appropriate ai detti suoni, ed accadendo che il loro aggregato, non altrimenti che nelle corde solide, ci spenda il tempo 1. nel far transito da uno stato all'altro di quiete, si sveglierà il suono 1. nell'orecchio.

Merita per tanto qualche modificazione quello, che ho scritto

scritto nel citato numero XXVI. dello Schediasma IV. Una corda d'aria fa una vibrazione nel tempo stesso, in cui il suono si propaga da una estremità all'altra della sua lunghezza, sopra di che veggasi lo Schediasma V. al numero III. Le due corde (Fig. 22.) C, F del violino producenti i suoni dinotati dai numeri n, N fra loro primi pongano in oscillazione le particole aeree contenute nel raggio sonoro BD, onde conforme ho dichiarato concepiscano anche la vibrazione propria del suono 1. Se nel tempo $\frac{1}{n}$ di una vibrazione della corda C il suono scorre lo spazio BS $= \frac{L}{n}$, nel tempo $\frac{1}{N}$ di una vibrazione della corda F passerà lo spazio BF $= \frac{L}{N}$, e nel tempo 1. lo spazio BA $= L$. Perciò le corde di aria BS, BF, BA sono atte a rendere i suoni n, N, 1, ed io posso concepire, che la corda indefinita BD venga divisa nelle tre specie di porzioni uguali a BS, BF, BA, e ne porti i suoni all'orecchio.

Non deggio tralasciar di notare, che fra gli innumerabili raggi sonori, che partono dai punti per esempio C, F delle due corde del violino, quelli soli generano il terzo suono, che si incontrano in un qualche punto B, il che (sendo uguale la velocità, con cui si propagano le voci gravi ed acute) segue sempre a pari lontananze CB, FB dai mentovati punti C, F. In tal guisa la particola B comincia nello stesso momento a vibrarsi in doppia forma, e vi impiega il tempo 1. a passare al susseguente stato di quiete. Diffondendosi la vibrazione sonora per la direzione BD media tra le due CB, FB, se in essa direzione si trova l'orecchio, sente mediante il raggio BD oltre i suoni n, N anche il terzo, che si esprime per l'unità. Conciossiachè fra i raggi, che dalle corde C, F vengono al sensorio, si contino rispettivamente pochi quelli, che sieno forniti della nominata condizione, il terzo suono ha da riuscire assai più fiacco dei due del violino, come di fatto l'esperienza ci manifesta.

VIII. Ora egli è di uopo provare, che i punti della corda conformata ad una delle curve, di cui ho data la costruzione

sono

sono spiritose dall'esporre nelle lettere necessarie, benchè ne nasca la [illegible] la corda stessa nella [illegible] componendosi di curve semplici analoghe alla primitiva si tratta sempre d'una curva di simile natura, che si determina col mezzo della sua costruzione. Mi restringerò a considerare brevemente [illegible] soli [illegible], potendosi collo stesso metodo provvedere a casi più composti.

La curva (fig. 44) BCNRlanN3CA nasca dalla composizione conforme il mio metodo delle due BDCnDA, BGSnlaS3GA, alle quali conformandosi la corda AB, [illegible] la forza acceleratrice del punto l composta nella distanza dall'asse AB. Sia, come nello Schediasma IV. AB = L, la massa della corda = M, il peso o forza che la tende = P, AH = x, HD = y, e si ponga HG = g. Al numero X. dello Schediasma IV. ho dimostrato, che qualunque sia la curva BCNRlanN3CA, la forza acceleratrice del punto l si eguaglia alla quantità $\frac{LP}{Mdx^2}$ moltiplicata nella seconda differenza della ordinata Hl = $y+g$: ma nel nostro caso la predetta seconda differenza = $-ddy-ddg$; dunque la forza acceleratrice del punto l = $-\frac{LPddy}{Mdx^2}-\frac{LPddg}{Mdx^2}$.

Denotata la proporzione fra il raggio, ed il quadrante circolare per $\frac{C}{B}$, è in seguenza del numero IV. del citato Schediasma, che alle curve BDCnDA, BGSnlaS3GA competono le equazioni $\frac{CL}{2nB}\cdot\frac{dy}{\sqrt{C^2-y^2}}=dx$, $\frac{CL}{2NB}\cdot\frac{dg}{\sqrt{G^2-g^2}}=dx$, nelle quali C, G significando le massime [illegible]. Presa la differenza nella supposizione consueta di dx costante, troveremo $-ddy=\frac{ydy^2}{C^2-y^2}$, $-ddg=\frac{gdg^2}{G^2-g^2}$; e giacchè $C^2-y^2=\frac{C^2L^2dy^2}{4n^2B^2dx^2}$, $G^2-g^2=\frac{C^2L^2dg^2}{4N^2B^2dx^2}$, effettuate le sostituzioni, ci si presenterà

$-\frac{LPddy}{Mdx^2}=\frac{4n^2B^2Py}{C^2LM}$, $-\frac{LPddg}{Mdx^2}=\frac{4N^2B^2Pg}{C^2LM}$; e quindi

$-\frac{LPddy}{Mdx^2}-\frac{LPddg}{Mdx^2}=\frac{4n^2B^2Py}{C^2LM}+\frac{4N^2B^2Pg}{C^2LM}$ sarà la forza acceleratrice del punto l, la quale pareggia le due forze $\frac{4n^2B^2Py}{C^2LM}=F$, $\frac{4N^2B^2Pg}{C^2LM}=f$, che pel numero VII. dello

Schediasma

Schediasma IV, accelerano i due punti corrispondenti D, G della curva ADCHDA, AGSMGA; alle quali accomodandosi la corda, ne rendano i suoni solitari, n.º IV.

VIIII. Mi immagino tre corde totalmente pari nella materia, lunghezza, grossezza, e tensione, e suppongo che siano accomodate (Fig. 4.ª) alle curve ADCHDA, AGSMGA, AENVCEA (ed EA) di maniera che nel primo momento del moto alla stessa ascissa AH corrispondano HD $= c$, HG $= g$, HE $=$ HD $+$ DE $= c+g$. Poichè la forza del punto E eguaglierà all'aggregato delle forze f, f dei punti D, G, ne seguirà che nel primo tempicello dt il punto E acquista una velocità V uguale alla somma delle velocità u, v dei punti D, G, e scorrerà uno spazio eguale alla somma degli spazj passati dai detti punti; e perciò facendosi uguali sottrazioni da quantità uguali, si eguaglieranno i residui; ed anche nel cominciamento del secondo tempicello sarà come richiede la mia composizione HE $=$ HD $+$ HG, e pel numero antecedente la forza del punto E pareggerà le forze f, f dei punti D, G. Si applichi il discorso ai susseguenti minimi tempi, e si conchiuda che dopo il tempo t, sarà V $= u+v$, e HE $=$ HD $+$ HG conforme la idea e condizione che addimanda, e la forza del punto E si eguaglierà all'aggregato delle forze dei punti D, G. Quindi se nel tempo inassegnabile dt i punti D, G camminano gli spazj $-dy$, $-dz$ proporzionati alla velocità u, v, dal punto E corrispondente passeranno gli spazi $dy+dz$ relativi alla velocità V $= u+v$. Ora riassumendo dal numero XIV. del mentovato Schediasma $u = \pm \frac{2nB}{C}\frac{\sqrt{P.\,c^2-y^2}}{\sqrt{2LM}}$, $v =$ $\pm \frac{2NB}{C}\frac{\sqrt{P.\,g^2-y^2}}{\sqrt{2LM}}$; scopriremo V $= u+v = \pm \frac{2nB}{C}\frac{\sqrt{P.\,c^2-y^2}}{\sqrt{2LM}}$ $\pm \frac{2NB}{C}\frac{\sqrt{P.\,g^2-y^2}}{\sqrt{2LM}}$. #

IX. Dalla velocità V $= u+v$ del punto E si può altresì stabilire il valore col mezzo del metodo delle azioni, che è il vero metodo della Natura. Giacchè al numero VIII ho notato la forza acceleratrice del detto punto $= \frac{4n^2B^2Pg}{C^2 2LM} + \frac{4N^2B^2Pg}{C^2 LM}$,

di che

pag. 27#

Non si trascuri la conseguenza, che adattandosi costantemente pel numero IX. dello Schediasma IV. le due prime corde a curva di simil natura; questa proprietà si accomuna anche alla terza corda, la cui figura in qualunque istante si compone con quella delle corde prima, e seconda.

Scholio numero IV, ricaderanno i due punti corrispondenti D, G della curva ADGA, AGSA, alle quali si accomoderanno la corda, rimanendo i suoi sottoposti [illegible].

VIIII. Mi immagino tra sotto totalmente posti nella materia [illegible]; [illegible], e suppongo che siano accomodati (Fig. 4. a) alle curve ADGA, AGSA [illegible] [illegible]; intendendo che nel primo momento del moto alla stessa ascissa AH corrispondano $HD = x$, $HG = z$, $HE = HD + DE = x + z$. Poichè la forza del punto E si eguaglierà all'aggregato delle forze f, f dei punti D, G, ne seguirà che nel primo tempicello di il punto E acquista una velocità V eguale alla somma delle velocità u, v dei punti D, G, e scorrerà spazio eguale alla somma degli spazj passati dai detti punti; e perciò facendosi eguali sottrazioni da quantità eguali, si eguaglieranno i residui; ed anche nel cominciamento del secondo tempicello sarà come richiede la mia costruzione $HE = HD + HG$, e pel numero antecedente la forza del punto E pareggerà le forze f, f dei punti D, G. Si applichi il discorso ai susseguenti minimi tempi, e si conchiuderà che dopo il tempo t, sarà $V = u + v$, $HE = HD +$ [illegible] HG conforme la mia costruzione addimanda, e la forza del punto E si eguaglierà all'aggregato delle forze dei punti D, G. Quindi se nel tempo inassegnabile dt i punti D, G camminano gli spazj $-dy$, $-dz$ proporzionati alla velocità u, v, dal punto E si passerà lo spazio $-dy - dz$ relativo alla velocità $V = u + v$, [illegible] [illegible] XIV. Del

ası̀ che questa si applica allo spazio elementare $-dy-dq$, avremo $\frac{4n^2B^2Py + N^2B^2Pq}{C^2LM}\cdot -dy-dq =$

$\frac{4B^2P}{C^2LM}\cdot -n^2q\,dy - n^2y\,dq - N^2q\,dy - N^2y\,dq = V\,dV$ .. (*) Abbiamo imparato nel numero antecedente, che i punti D, G scorrono nel medesimo tempo di colle velocità u, v gli spazietti $-dy$, $-dq$, ed essendo pel numero XIV. dello Schediasma IV. $dt = \frac{C}{nB}\sqrt{\frac{LM}{P}}\cdot\frac{-dy}{n\sqrt{c^2-y^2}}$, $dt = \frac{C}{2B}\sqrt{\frac{LM}{P}}\cdot\frac{-dq}{N\sqrt{g^2-q^2}}$, ne risulta $\frac{-dy}{n\sqrt{c^2-y^2}} = \frac{-dq}{N\sqrt{g^2-q^2}}$: formola, da cui nascono le due seguenti $-\frac{nNy\,dy\,\sqrt{g^2-q^2}}{\sqrt{c^2-y^2}} = n^2y\,dq$; $-\frac{nNq\,dq\,\sqrt{c^2-y^2}}{\sqrt{g^2-q^2}} = -N^2q\,dy$.

Sostituisco nella equazione (*) in vece di $-n^2y\,dq$, $-N^2q\,dy$ gli scoperti valori, e mi si presenta

$\frac{4B^2P}{C^2LM}\cdot -n^2y\,dy - \frac{nNy\,dy\cdot\sqrt{g^2-q^2}}{\sqrt{c^2-y^2}} - \frac{nNq\,dq\cdot\sqrt{c^2-y^2}}{\sqrt{g^2-q^2}} - N^2q\,dq = V\,dV$,

ed integrando coll'aggiunta della necessarie costanti, acciocchè quando $V=0$, sia $y=c$, $q=g$

$\frac{4B^2P}{C^2LM}\cdot n^2\cdot\overline{c^2-y^2} + 2nN\sqrt{c^2-y^2}\sqrt{g^2-q^2} + N^2\,\overline{g^2-q^2} = V^2$, ed estraendo la radice $\frac{2B}{C}\sqrt{\frac{P}{LM}}\cdot \pm n\sqrt{c^2-y^2} \pm N\sqrt{g^2-q^2} = u+v = V$, ch'è quello stesso valore, che ho ritrovato di sopra al numero VIIII.

Avverto che i segni amendue affermativi si adattano al caso, che l'una e l'altra velocità componente u, v sia positiva, cioè a dire diretta da C verso H. Se tutte e due le dette velocità tendono da H verso C, servono i segni negativi. Ma se u ha la direzione CH, ed v la HC, cadono in concio i segni positivo, e negativo; e se il contrario succede, vagliono i segni negativo, e positivo. I due ultimi casi, nei quali le velocità u, v, che compongono la V, sono contrarie, richiedono le formole differenziali

$\frac{4n^2B^2Py - 4N^2B^2Pq}{C^2LM}\cdot -dy+dq = V\,dV$,

$\frac{-4n^2B^2Py + 4N^2B^2Pq}{C^2LM}\cdot +dy-dq = V\,dV$.

XI. Componendosi la velocità V del punto e dalle due u, v dei punti D, G, i quali vibrandosi producono i suoni n, N; accade che il detto punto concepisca congiuntamente due specie di oscillazioni, che i suoni n, N nell'orecchio risvegliano. Ella è cosa maravigliosa, ch'esistendo nel punto la velocità composta e non già le componenti; nulladimeno il sentito ne formi una idea talmente chiara, che dà i suoni distinti n, N. Un simile effetto accade talvolta nell'occhio: Se io rimiro dal lido un uomo, che cammina lungo una barca, la quale spinta dal vento si muove parallela al predetto lido, nettamente discerno nell'uomo la velocità propria, e quella che ha colla barca comune. Valendomi anche in riguardo al punto e della teorica del moto traslato, posso concepire che allo stesso punto s'imprima la velocità u dalla forza $F = \frac{4m^2B^2Py}{C^2LM}$, che lo spinga per gli spazj elementari dy, e la velocità v dalla forza $f = \frac{4N^2B^2Pg}{C^2LM}$, che lo spinga per gli spazj elementari $\pm dg$, e che con quella velocità il suono n, e con questa il suono N si generi.

Nel presente numero, e nei precedenti ho sempre adattato i discorsi alla figura 41, e supposto cospiranti le forze F, f, e le velocità u, v. Egli è pertanto agevole l'applicarli agli altri casi. Se come nella figura 42, le mentovate forze, e velocità fossero contrarie, ne risulterebbe la forza del punto e da e verso $H = F - f$, $He = Hd - ed$, $V = u - v$.

XII. Le velocità componenti $u = \pm \frac{2nB}{C}\sqrt{\frac{P}{LM}\cdot \overline{c^2 - y^2}}$, $v = \pm \frac{2NB}{C}\sqrt{\frac{P}{LM}\cdot \overline{g^2 - \gamma^2}}$ sono generalmente nulle, quando $y = \pm c$, $\gamma = \pm g$, e ciò può accadere o nel medesimo istante, o in diversi. Saranno nulle nello stesso istante, qualora la corda si trova in uno de' suoi stati di quiete, ed in tal caso avremo $V = 0$. Negli altri incontri se sarà nulla la velocità u, non sarà tale la v, o al contrario. In oltre la velocità u sarà nulla in riguardo ai nodi, per esempio Z (fig. 41), che separano una parte $\frac{L}{n}$ dall'altra; e lo stesso dicasi della

[illegible] $\sqrt{c^2-y^2}$ [illegible] $N \cdot \int \sqrt{g^2-q^2}$; e per conseguenza $n : N :: \int \frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}} : \int \frac{-dq}{\sqrt{g^2-q^2}}$. Riflettasi essere $\int \frac{-dy}{\sqrt{cc-y^2}}$ un arco di circolo diviso pel suo raggio, il cui coseno $= \pm y$, il quale arco si uguaglia ad un arco simile descritto col raggio $= 1$. Lo stesso discorso si applichi a $\int \frac{-dq}{\sqrt{g^2-q^2}}$.

Coi raggi (fig. 43.) $PK = g$, $PL = c$, $PM = 1$ si descrivano i tre circoli segnati nella figura, e tagliato ad arbitrio l'arco MR, si tiri il raggio PR, e pel punto Q, nel quale interseca il circolo LQl, si deliveri QP normale ad Mm. Dallo stato di quiete della corda (fig. 41. e 43) BQNnqQnN3QA fino ad uno dato istante sia passato il tempo rappresentato dall'arco MR, ed il punto Q in riguardo alla velocità u, e per cagione della forza $F = \frac{4n^2k^2py}{c^2LM}$ avrà scorso lo spazio LP. Se come nella detta figura 41, anche la forza $f = \frac{4N^2k^2pq}{c^2LM}$ non altrimenti che la compagna spinga da principio il punto Q per la direzione QH, si determini l'arco MRS, che stia all'arco MR come $N : n$, e condotto il raggio PS, che taglierà il circolo KOk nel punto O, si meni per esso la retta ON normale ad Mm, ed accaderà che nel tempo MR il punto Q abbia viaggiato colla velocità v, ed a cagione della forza $f = \frac{4N^2k^2pq}{c^2LM}$ per lo spazio KN. Quindi il totale spazio, per cui si sarà mosso da Q verso H il punto Q, pareggerà LP + KN.

Che se come nella figura 42 la forza $f = \frac{4N^2k^2pq}{c^2LM}$

nel

pag 277

• # ed intanto avverto, che formando lo ovacchio una idea distinta delle velocità componenti u, v, non concepisce come stato di quiete del punto a quello, in cui le dette velocità sono eguali e contrarie, e la velocità assoluta $V = 0$; ma riserba un tale giudizio alla circostanza, nella quale si annullano tutte e tre le velocità mentovate, ed il riposo è comune alla corda intera.

velocità v in riguardo ai nodi N, $2N$; e perciò rispettivamente al punto K sarà $V = v$; e rispettivamente ai punti N, $2N$ $V = u$. Finalmente la velocità V si annullerà, posto che si avveri la circostanza, che le due velocità corrispondenti siano eguali, e contrarie, onde si abbia $n\sqrt{c^2-y^2} = N\sqrt{g^2-q^2}$. Sopra di ciò terrò quanto prima ragionamento discorso: ∯

XIII. Conciossiachè pel numero IX. $\frac{-dy}{n\sqrt{c^2-y^2}} = \frac{-dq}{N\sqrt{g^2-q^2}}$, avremo integrando $\frac{1}{n}\int\frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}} = \frac{1}{N}\int\frac{-dq}{\sqrt{g^2-q^2}}$, e per conseguenza $n : N :: \int\frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}} : \int\frac{-dq}{\sqrt{g^2-q^2}}$. Riflettasi essere $\int\frac{-dy}{\sqrt{c^2-y^2}}$ un arco di circolo diviso pel suo raggio, il cui coseno $= \pm y$, il quale arco si agguaglia ad un arco simile descritto col raggio $= 1$. Lo stesso discorso si applichi a $\int\frac{-dq}{\sqrt{g^2-q^2}}$.

Coi raggi (fig. 43.) $9K = g$, $9L = c$, $9M = 1$ si descrivano i tre circoli segnati nella figura, e tagliato ad arbitrio l'arco MR, si tiri il raggio $9R$; e pel punto Q, nel quale interseca il circolo LQl, si deliveri QP normale ad Mm. Dallo stato di quiete della corda (fig. 41. e 43) $BeN2e2N3eA$ sino ad uno determinato istante sia passato il tempo rappresentato dall'arco MR, ed il punto e in riguardo alla velocità u, e per opera della forza $Z = \frac{4n^2B^2py}{C^2LM}$ avrà scorso lo spazio LP. Se come nella detta figura 41, anche la forza $f = \frac{4N^2B^2pq}{C^2LM}$ non altrimenti che la compagna spinga da principio il punto e per la direzione eH, si determini l'arco MRS, che stia all'arco MR come $N : n$, e condotto il raggio $9S$, che taglierà il circolo KOk nel punto O, si meni per esso la retta ON normale ad Mm, ed accaderà che nel tempo MR il punto e abbia viaggiato colla velocità v, ed a cagione della forza $f = \frac{4N^2B^2pq}{C^2LM}$ per lo spazio KN. Quindi il totale spazio, per cui si sarà mosso da e verso H il punto e, pareggerà $LP + KN$.

Che se come nella figura 42 la forza $f = \frac{4N^2B^2pq}{C^2LM}$

nel

nel cominciamento del moto è contrario all'altro $z = \frac{4n^2B^2Py}{C^2LM}$, e stimato il punto e da H verso d, si segui

$ms = MS$, e trovate come sopra sl, on, sarà kn lo spazio corso dal punto e colla velocità negativa v; e perciò ne risulterà lo spazio assoluto per la direzione dH eguale ad $LP - kn$.

In sì fatta guisa determineremo in ogni istante il sito del punto e (fig. 41.), ovvero e (fig. 42.) e di qualunque altro, e potremo delineare la figura, a cui nel detto istante si adatta la corda.

XIIII. Le seguenti avvertenze metteranno la cosa ancora più in chiaro. Gli spazj LP, KN, ovvero kn crescono sino alla loro massima misura $Ll = zc$, $Kk = kK = zg$, indi calano sin a tanto che divengono nulli, e poscia tornano a crescere: e quante volte andando, e ritornando si percorrono gli spazj zc, zg, tante vibrazioni fa la corda come pendente i suoni n, N.

Negli stati di quiete 1, 3, 5, &c. amendue gli spazj LP, KN; o pure kn eguagliano il nulla: negli stati di quiete 2, 4, 6, &c saranno o tutti due massimi, se n, N sono numeri impari; o $LP = 0$, e KN, ovvero $kn = zg$, se n è pari, ed N impari, o $LP = zc$, e KN, ovvero $kn = 0$, se n è impari, ed N pari. Posto che i due numeri n, N siano ambo pari, si divideranno per la massima loro comune misura φ, e secondo che $\frac{n}{\varphi}$, $\frac{N}{\varphi}$ saranno ambo impari, o il primo pari e il secondo impari, o al rovescio, succederà quello, che ho testè stabilito, negli stati di quiete 2, 4, 6, &c.

La dimostrazione della verità annunziata dipende da ciò, che gli spazj LP, KN, o kn svaniscono, quando la corda come divisa nei numeri di parti n, N ha compiuto un numero pari di vibrazioni: ed al contrario pareggiano i massimi valori zc, zg, quando la corda stessa ha effettuato un numero impari di vibrazioni come

divisa

dividansi detti numeri di parti; e sia φ la massima comu-
ne misura dei numeri n, N, la quale si aguaglia alla unità,
se essi numeri siano fra loro primi. Negli stati di quiete
1, 3, 5, &c. la corda ha fatto vibrazioni dell'una, e dell'al-
tra specie 0; $\frac{2n}{\varphi}$, $\frac{2N}{\varphi}$; $\frac{4n}{\varphi}$, $\frac{4N}{\varphi}$; &c.: e poichè $\frac{n}{\varphi}$, $\frac{N}{\varphi}$
sono numeri interi, saranno sempre $\frac{2n}{\varphi}$, $\frac{2N}{\varphi}$; $\frac{4n}{\varphi}$, $\frac{4N}{\varphi}$; &c.
numeri pari, qualunque valore o pari, o impari si attribuisca
ai numeri n, N; e per conseguenza si eguaglieranno a nulla
gli spazj LP, KN, ovvero kn. Ma negli stati di quiete
2, 4, 6, &c. avendo la corda terminate vibrazioni delle due
specie $\frac{n}{\varphi}$, $\frac{N}{\varphi}$; $\frac{3n}{\varphi}$, $\frac{3N}{\varphi}$; $\frac{5n}{\varphi}$, $\frac{5N}{\varphi}$, &c.; si suppongano
in primo luogo i numeri n, N ambo impari, e dovendo es-
sere parimente impari la massima loro comune misura φ; ne
segue necessariamente, che si annoverano fra gli impari
i numeri interi $\frac{n}{\varphi}$, $\frac{N}{\varphi}$, ed altresì $\frac{3n}{\varphi}$, $\frac{3N}{\varphi}$; $\frac{5n}{\varphi}$, $\frac{5N}{\varphi}$; &c.;
laonde per la regola data $LP = 2c$, KN, ovvero $kn = 2g$.
Che se n è pari, ed N impari, o al contrario, ha da contarsi
fra i numeri dispari la massima loro comune misura φ, e
seguitando $\frac{n}{\varphi}$, $\frac{N}{\varphi}$; $\frac{3n}{\varphi}$, $\frac{3N}{\varphi}$; $\frac{5n}{\varphi}$, $\frac{5N}{\varphi}$; &c. la natura dei
numeri n, N in riguardo all'esser pari, o dispari; si con-
chiude essere $LP = 0$, e KN, ovvero $kn = 2g$ posto n
pari, ed N impari, ed a rovescio $LP = 2c$, e KN, ovvero
$kn = 0$, posto n impari, ed N pari. Resta che si consideri
la circostanza, che n, ed N siano ambo numeri pari; nella
quale la comune massima misura φ esser dee pari. Ora
dividendo due numeri pari n, N per la massima comune
misura φ altresì pari, ne possono risultare i quozienti
$\frac{n}{\varphi}$, $\frac{N}{\varphi}$ ambo impari, o quello pari e questo dispari, o all'
opposto, e della stessa indole saranno $\frac{3n}{\varphi}$, $\frac{3N}{\varphi}$; $\frac{5n}{\varphi}$, $\frac{5N}{\varphi}$;
&c. Quindi nel primo caso $LP = 2c$, KN, ovvero $kn = 2g$,
nel secondo $LP = 0$, KN, ovvero $kn = 2g$, e nel terzo
$LP = 2c$, KN, ovvero $kn = 0$.

Si inferisca, che negli stati di quiete 1, 3, 5, &c
la corda è sempre fornita della medesima figura, e collocata

nel

nel medesimo sito. Lo stesso si affermi degli stati di quiete 2, 4, 6, &c.

XIV. Aggiungo ch'egli è sufficiente il determinare la figura della corda negli istanti di mezzo fra il primo, ed il secondo stato di quiete; imperciocchè quando essa fa transito dal secondo stato di quiete al terzo, dal terzo al quarto, &c. ripiglia costantemente in qualunque dato sito la primiera figura. E vaglia il vero (fig. 41, 43.) gli spazj LP, KN, ovvero kn passati dal punto A preso ad arbitrio hanno gli stessi valori; e mentre dal principio del moto è scorso il tempo MR, e mentre ci manca alla corda un egual tempo per giugnere agli stati di quiete 3, 5, 7, &c. o fra gli stati di quiete 1 e 3, 3 e 5, 5 e 7, &c. come l'intervallo di tempo $MRS'rsm.\frac{2n}{\varphi}$, e sottraendo il tempo MR, abbiamo l'avanzo $MRS'rsm.\frac{2n}{\varphi}-MR$, passato il quale, resta ancora il tempo MR per arrivare ad uno degli stati di quiete in secondo luogo nominati. Fatto $Mrk = MR$, l'avanzo ultimo del tempo $MRS'rsm.\frac{2n}{\varphi}-MR$ caderà in rR, perchè $MRS'rsm.\frac{2n}{\varphi}$ è un numero pari di semicircoli, ed all'arco Mrk non altrimenti che all'eguale MR corrisponderà lo stesso spazio LP. Ora dee stabilirsi il sito del punto rS, ovvero rS' relativo al rk. Si otterrà ciò pel numero XIII. col mezzo dell'analogia

$$n : N :: MRS'rsm.\frac{2n}{\varphi}-MR : MRS'rsm.\frac{2N}{\varphi}-MR.\frac{N}{n}:$$

e riflettendo essere $MRS'rsm.\frac{2N}{\varphi}$ (pel num. XIII) un numero pari di semicircoli; ed $MR.\frac{N}{n} = MS' = ms'$, si tagli $MrS' = MS'$, ovvero $mrs' = ms'$, e chiaramente si scoprirà, che ad entrambe le dette coppie di archi eguali si riferiscono gli stessi spazj KN, ovvero kn, e che qualsivoglia punto A della corda AB dopo i mentovati tempi MR, $MRS'rsm.\frac{2n}{\varphi}-MR$ si ritroverà nel medesimo sito distante da quello occupato nel primo stato di quiete per LP+KN, ovvero LP−kn. Quindi o passi la corda dal primo al secondo stato di quiete,

o

o pure si muova dal secondo al terzo, dal quarto al quinto, &c. Lo sviluppo accelererà sempre ma nel modo spiegato la medesima serie di figure.

Che poi nel transito dal primo al secondo stato di quiete, dal terzo al quarto, dal quinto al sesto, &c. la corda prenda la stessa progressione di figure, ella ne' casi suddetti, (quantunque riconducendosi alla medesima figura negli stati di quiete 1, 3, 5, &c.,) non ci è ragione, per cui (prescindendo dalla resistenza) una serie debba differire dall'altra.

XVI. Si adatterà la corda alla figura conveniente al suono solitario n, quando avendo compiute semivibrazioni 1, 3, 5, &c. proprie del suono N, sarà (fig. 41, 42, 43) $KN = KI = g$; ovvero $kn = kI = g$, e conseguentemente $IN = De = o$; ovvero $In = de = o$. L'ordinata HD sarà positiva, o negativa, secondochè LA calerà, o crescerà posto al paragone con $LI = c$.

Negli istanti poi, ne' quali avrà essa corda terminate semivibrazioni 1, 3, 5, &c. convenienti al suono n; si troverà conformata alla figura richiesta dal suono unico N, ed in tal circostanza sarà $LP = LI = c$; e perciò $PN = DH = o$. Anche qui l'essere De positiva, o negativa; de negativa, o positiva dipende dalla grandezza in quel tal momento di KN, che sia minore, o maggiore di $KI = g$, e similmente di kn minore, o maggiore di $kI = g$.

Ma se n, N fossero numeri impari, nello stesso istante avrebbe la corda effettuate semivibrazioni $\frac{n}{\varphi}$, $\frac{N}{\varphi}$; $3\frac{n}{\varphi}$, $3\frac{N}{\varphi}$; $5\frac{n}{\varphi}$, $5\frac{N}{\varphi}$; &c., e tutti i suoi punti sarebbero collocati nella linea retta ACB.

Eccettuati i casi notati, ne' quali le saette della corda, che oscilla divisa nei numeri di parti n, N, sono o quelle di una sola specie, o quelle di ambedue uguali a nulla; la figura della corda stessa si compone sempre delle due richieste dai suoni solitarj n, N; ed il valore positivo, o negativo di HD, De, negativo, o positivo di de trae l'origine da quello delle linee relative LP, KN,

ovvero

ovvero LP, kn, conforme ho testè avvertito. Nel primo stato di quiete, ossia nell'istante M siano date le curve componenti BDCzDA, BGSzQzS3GA, e conseguentemente ancora la curva composta BQNzQzN3QB, in cui all'assissa AH corrispondono HD = LD = c, DQ = KD = g. La nostra costruzione consegna, che nel momento k sarà DH = PI, QD = NI. Ora verificandosi la condizione, che le ordinate delle curve del suono n corrispondenti alla stessa assissa negli istanti M, k si riguardino nella proporzione LD : PI, e quelle del suono N nella proporzione KD : NI, egli è facile, essendo date le curve componenti, e la composta nell'istante M, il determinare nell'istante k intera la curva prodotta. Questa avvertenza vale anche per la descrizione della figura della nostra corda, quando negli incontri sopra stabiliti QD, ovvero DH si eguaglia al nulla, e la corda si adatta all'una, o all'altra delle figure componenti.

Non tralascio di notare, che i nodi per esempio zQ della corda divisa nel numero n di parti si muovono, come se la corda rendesse l'unico suono N, e similmente i nodi per esempio N, zN della corda divisa nel numero N di parti si vibrano, come se dalla corda l'unico suono n venisse prodotto; laonde quelli sono sempre collocati in una curva propria del suono N, e questi in una curva propria del suono n.

XVII. Ho detto al numero XII., che la velocità assoluta V del punto Q si annullerà, qualora le due velocità componenti u, v siano eguali e contrarie, onde si abbia $n\sqrt{c^2-y^2} = N\sqrt{g^2-y^2}$. Per ottener ciò, egli è di uopo primieramente, che se il punto k cada nel semicircolo M, kS'zS'm, il punto S' cada nel semicircolo mS'zS'kM per esempio in s, o a rovescio; dimodochè siano contrarie le velocità u, v, e se la direzione di una è da L verso I, quella dell'altra sia da K verso I. In secondo luogo egli è necessario, che le ordinate QR = $\sqrt{c^2-y^2}$, RO = $-\sqrt{g^2-y^2}$ stiano fra loro come $\frac{1}{n} : \frac{+1}{N}$, ossia in ragione inversa dei suoni n, N; e

propr

proprj delle vibrazioni per gli spazj $LI = 2c$; $KK = 2g$.
La perdita totale di moto nel punto C, della quale si parla, diversa dall'altra comune a tutta la corda negli stati di quiete, dee succedere infallibilmente, quando nell'intervallo di tempo fra uno stato e l'altro di quiete della corda il punto C ha necessariamente da mutar direzione. Negli altri casi la detta perdita può avvenire, e non avvenire, secondo la varia proporzione di $LI = c$: $KI = g$ [illegible]

XVIII. Ricorro ad un esempio per illustrar quanto basta la mia asserzione. Oscilli la corda congiuntamente divisa in parti uguali 2, e 3, conforme dimostra la figura 41, onde sia $n = 2$; $N = 3$. Fa transito essa corda da uno stato all'altro di riposo dopo due vibrazioni della corda bipartita e tre della tripartita, ed in questo mezzo il punto C è costretto a mutar direzione. In fatti passati $\frac{2}{3}$ del tempo di una vibrazione del suono n, eguale all'intero tempo di una vibrazione del suono N, il punto C ha scorso per la direzione CH, o sia dell'lo spazio $LI + \frac{1}{2} II + KK = \frac{3}{2}c + 2g$, e finite due vibrazioni del suono n, e tre del suono N, il detto spazio si ristringe alla misura $KK = 2g$. Il punto C pertanto cangiata direzione è ritornato indietro, ed è passato per lo stato di quiete dal moto positivo al negativo, qualunque sia la proporzione fra c, e g.

Se MR pareggia due terze parti del semicircolo, ne risulta MRS eguale al semicircolo, ed il punto S coincide col punto m. Ma posto che MR s'eguagli al semicircolo, l'arco MSK si distenderà per quadranti, ed il punto S è collocato nel mezzo cerchio mS'rKM. Acciocché dunque il punto K sia nel semicircolo MRS'rSm, ed il punto S nel semicircolo mS'rS'rKM, si rende necessario, che la grandezza dell'arco MR sia di mezzo fra due terzi di semicircolo, ed il semicircolo intero. Quindi il punto C ha da pervenire alla quiete in un tempo maggiore di due terze parti del tempo di una vibrazione del suono n, e minore del tempo di una

vibrazione

vibrazione intiera.

La determinazione del detto tempo dipende dalla proporzione fra c, e g. Giunga per esempio il punto e alla quiete, quando sia (fig. 41, e 44) MK uguale a $\frac{4}{5}$ di semicircolo, MKmS uguale a $\frac{6}{5}$. Essendo in tale incontro mk = mS, ne risulta PQ : NO :: IQ = c : IO = g, e quindi posta $PQ = \frac{c}{\varphi}$, sarà $NO = \frac{g}{\varphi}$: e giacchè asser dee 2PQ = 3NO, avremo $2c = 3g$, o sia $c : g :: 3 : 2$; e perciò se c, e g si riguarderanno nella detta ragione, il punto e resterà privo di moto dopo $\frac{4}{5}$ del tempo di una vibrazione del suono n. Si faccia l'osservazione, che cangiandosi la proporzione fra HD, De = HG al crescere, o al calare delle ascissa BH, i varj punti della corda in tempi diversi pervengono al riposo; e per conseguenza la quiete del punto e nella presente circostanza non è comune nello stesso istante agli altri punti, e la corda non si trova in istato di quiete.

XVIIII. Il punto e può nuovamente rimaner senza moto, prima che la corda pervenga al secondo stato di quiete, ed acquisti la figura 44. Sarà ciò da poter succedere, il punto k dee ritrovarsi nel semicircolo mSM, esempigrazia in v; ed il punto S nel semicircolo MKm, esempigrazia in s; onde non siano ancora compiute due vibrazioni del suono n, e tre del suono N. Pongasi che li archi MKmSv superino di un minimo $\frac{4}{3}$ di semicircolo, li archi MKmSvMs superaranno altresì due semicircoli per una minima quantità, e cui Ms si agguaglierà. Avendo dunque in tal caso $pq = \frac{1}{2} c\sqrt{3}$, $qm = \frac{g}{cs}$; ed acciocchè succeda la quiete del punto e nell'istante v, dovrà avverarsi l'equazione $c\sqrt{3} = \frac{3g}{cs}$, che determina g infinito in riguardo a c, o pure c nullo in riguardo a g.

Sia MKmS uguale a tre mezzi semicircoli, e conseguentemente MKmSvM si uguale a due semicircoli ed un quarto, onde ne risulti vM uguale ad un quadrante, ed Ms uguale a mezzo quadrante. Scopriremo

$pq = c$, $no = \frac{g}{\sqrt{2}}$, e nell'istante v il punto e avrà fatto perdita di tutto il suo moto, perchè si adempie l'equazione $2c = \frac{3g}{\sqrt{2}}$, che si riduce nell'analogia $c : g :: 3 : 2\sqrt{2}$, o prossimamente come $\frac{35}{33}$: 1.

Ma ponendo $MRmSv = \frac{4}{5}$ di semicircolo, ed $MRmSvMs = \frac{12}{5}$, è facile da vedersi essere $vM = Ms = \frac{2}{5}$, e che se $pq = \frac{c}{\varphi}$, avremo $no = \frac{g}{\varphi}$. Cadera la perdita del punto C nell'istante v, quando si verifichi la formola $\frac{2c}{\varphi} = \frac{3g}{\varphi}$, e perciò sia $c : g :: 3 : 2 :: \frac{3}{2} : 1$.

Dato che l'arco $MRmSv$ sia $= \frac{5}{3}$ di semicircolo, si avrà $MRmSvMs = \frac{5}{2}$ e per conseguenza $Mv = \frac{1}{3}$, $Ms = \frac{1}{2}$, troveremo $pq = \frac{c\sqrt{3}}{2}$, $no = g$. Vogliasi che nel momento v il punto e si fermi, dovrà essere $c\sqrt{3} = 3g$, ovvero $c : g :: \sqrt{3} : 1$ [illegible] prossimamente $\frac{26}{15}$ [illegible]

Finalmente sia [illegible] l'arco Mv [illegible], onde si determini $mRs = 3dR$; [illegible] pq [illegible] $= 3gdz$, avremo la perdita del punto e nell'istante v, che in questo [illegible] [illegible] nell'istante M, qualora si avveri l'equazione $4cdz = 3gdz$ [illegible] Avverto essere tra l'analogia $c : g :: 9 : 4$ [illegible] $\frac{9}{4}$ in questo caso $c : g :: \frac{1}{N^2} : \frac{1}{N^2}$, ed aggiungo, che generalmente il momento di riposo del punto e che può immediatamente precedere il secondo stato di questa, cadera nel detto stato, quando l'analogia premessa si adempia.

Pongo sotto gli occhi di chi legge la seguente tavoletta.

Tempi, che principiano dal primo stato di quiete espressi per la durata di una vibrazione del suono n, finiti i quali il punto C si ferma	Proporzione fra c, e g necessaria per ottenere in determinato istante la quiete del punto C nell'ultimi istanti dei tempi qui accanto descritti.
$1 + \frac{1}{3}$	$9 : 1$
$1 + \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2\sqrt{2}} : 1$ prossimamente $\frac{35}{33} : 1$
$1 + \frac{3}{5}$	$\frac{3}{2} : 1$
$1 + \frac{2}{3}$	$\sqrt{3} : 1$ prossimamente $\frac{26}{15} : 1$
2	$\frac{9}{4} : 1$

Da questa tavola si raccoglie, che se in un istante dalla ultima sua terza parte del tempo della seconda vibrazione del suono n il punto C ha da rimaner senza moto, egli è di necessità che la proporzione di c : g sia minore di 9 : 4: Dunque se la detta ragione è maggiore di 9 : 4, non si dà alcuno istante nel detto intervallo di tempo, in cui il punto C si fermi, il quale resta privo di velocità dopo due vibrazioni del suono n nell'istante M del secondo stato di quiete, non perchè le velocità u, v siano uguali, e contrarie, ma perchè amendue pareggiano il nulla. Se il punto C dentro l'assegnato spazio di tempo si riduce in riposo in un dato istante, si trova collocato (fig. 42.) da C verso D; ed è prima accelerandosi, e poscia ritardandosi ritorna in C ad esser privo di velocità, la qual proprietà è comune a tutta la corda, che in tal momento è giunta al secondo stato di quiete.

Ricorriamo anche qui ad un esempio. Si stabilisca $c : g :: 3 : 2\sqrt{2}$, di modo che si abbia $\frac{3g}{2\sqrt{2}} = c$, e per la cosa detta in questo numero, essendo $pq = c$, $no = \frac{g}{\sqrt{2}}$, scopriremo $Lp = c$, $Kn = g - \frac{g}{\sqrt{2}}$. Quindi nell'istante v, in cui il punto C si riduce in quiete, si trova esso lontano dal punto H (fig. 41, 44) per $HD + DC - Lp - Kn$, cioè a dire per

c

$c = \frac{3}{2}g \cdot \frac{1}{2} - g + \frac{g}{\sqrt{2}} = \frac{g}{\sqrt{2}}$, ovvero nel secondo stato di quiete (fig. 42) si discosta dallo stesso punto A per $Hd - da = c - g$; dunque la differenza di queste distanze sarà $\frac{g}{\sqrt{2}} - c + g$ $= \frac{g}{\sqrt{2}} - \frac{3g}{2\sqrt{2}} + g = g - \frac{g}{2\sqrt{2}}$, sostituendo in cambio di c il suo valore, la quale prossimamente equivale a $\frac{64}{99}g$; e quindi su la distanza [illegible] allo specchio della situazione, il punto appresso rimane dal punto H di [illegible] il punto a quella spazio [illegible].

XIX. Ora è facile di indagare i momenti di riposo del punto a, mentre la corda si trasferisce dal secondo al terzo stato di quiete. In verità, osservando la figura 44, onde nell'andata dal primo stato di quiete al secondo il punto a perdeva il moto totale negli istanti (fig. 44) k, v, ne' posteriori al principio del moto, essendo passati i tempi Msk, ovvero Mskmsv, succederanno simile perdita, qualora passerà al terzo stato di quiete, passano tempi eguali ai predetti. Infatti questo in quello ha dimostrato al numero XIV e anche questa coppia di istanti avremo gli stessi spazj LR, kN e Lp, kq, ai quali corrispondono, mutate soltanto le direzioni, le stesse ordinate RQ, NO, e per conseguenza la stessa velocità u, v proporzionali nella prima coppia di esse ad u.RQ, N.NO, e nella seconda ad u.pq, N.no. Se dunque scorso il tempo Msk, ovvero Mskmsv dopo il primo stato di quiete, le velocità u, v sono eguali e contrarie, le stesse addivverranno, quando per giungere al terzo stato di quiete rimarrà un tempo eguale ad Msk, ovvero ad Mskmsv.

Sia nel solito esempio dei suoni $n = \infty$, $N = 2$... $Msk = \frac{3}{5}$ del tempo di una vibrazione del suono n, $Mskmsv = \frac{48}{45}$, e seguirà pe' numeri XVIII e XVIIII il riposo del punto a nei momenti k, v, quando sia $LI = c : KI = g :: 3 : 2$. Dal tempo di queste vibrazioni del suono $n = \frac{n}{2}$, o sia della corda bipartita, impiegato nel passaggio dal primo al terzo stato di quiete, il qual tempo

si esprimerà per $\frac{n\alpha t}{5}$, [illegible] le quantità $\frac{\alpha\, t}{5}$, $\frac{\alpha t}{5}$, e ne risulteranno i tempi $\frac{\alpha t}{5}$ = [illegible] $\frac{\alpha t}{5}$ = [illegible] dopo il primo stato di quiete, e conseguentemente [illegible] i tempi $\frac{2t}{5}$, [illegible] dopo il secondo stato di quiete, terminati i quali il punto a si riduce in riposo.

XXI. Ho sempre supposto, che la forza $F+f$ [illegible] impressa [illegible] alla particola a (fig. [illegible]) [illegible] dalla seconda [illegible], ed [illegible] tempo da [illegible]. Dunque la detta forza $F+f = \frac{4B^2P}{C^2LM} \cdot n^2y + \frac{4B^2P}{C^2LM} \cdot N^2 \varphi$ [illegible] XIX.

[illegible] la proporzione delle ordinate $Ha = y + \varphi$, nulla [illegible] meno [illegible] composta di due forze F, f; [illegible] le distanze $HD = y$, $Da = \varphi$ dei punti medi H, D delle relative vibrazioni proprie della corda divisa in numero di parti n, N. Ora mentre la forza F sollecita [illegible] a per lo spazio Dy [illegible] alle altre particole, conforme [illegible] dalla [illegible] divisa in N; e lo stessa succede, mentre la forza f [illegible] il detto [illegible] per lo spazio [illegible]; dunque la forza $F+f$ è uguale all'aggregato delle [illegible] acceleratrici sollecitanti il punto a.

XXII. Le cose dette dell'unione di due suoni si possono estendere egualmente all'aggregato di suoni 3, 4, 5, 6, ec. La forza, che spinge il punto a, sarà composta da tante forze F, f, ec. quanto è il numero di suoni [illegible] [illegible] di parti n, N, ec. di parti uguali divisa si vibra [illegible] la corda. La forma delle nominate forze sarà $\frac{4B^2P}{C^2LM} \cdot N^2$ [illegible] quindi una forza particolare si aguaglierà alla costante $\frac{4B^2P}{C^2LM}$ moltiplicata nel prodotto del quadrato del suono, che le corrisponde, e della rispettiva distanza dal punto medio della vibrazione.

La velocità V nascerà dalla somma delle velocità u, v, ec. le quali si accomoderanno alla forma seguente $\frac{nB}{C}\sqrt{\frac{P}{LM}} \cdot \pm n\sqrt{c^2-y^2}$; in cui $\frac{nB}{C}\sqrt{\frac{P}{LM}}$ è grandezza

costante

costante, ossia di suono, o il numero di eguali porzioni, nel quale si parte la corda, e la distanza dal punto medio della vibrazione; quando [illegible], [illegible] la lontananza [illegible] [illegible] [illegible]

112. Determineremo la figura della corda in qualsivoglia momento, valendoci di tanti circoli concentrici, i cui raggi (fig. 43.) AL = [illegible], [illegible] quanti sono i suoni n, N, [illegible] non trascurate le avvertenze indicate nei numeri XIV, XV, e XVI. [illegible], adoperando il metodo spiegato nel numero XIII, [illegible] [illegible] [illegible] le distanze dalla [illegible] (fig. 43.) dai punti medj delle vibrazioni; quando [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] nella [illegible] XXIII [illegible] si possa adoprare la formola [illegible] [illegible] = dV = [illegible] fatto nel numero VIII, e [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] numero IX [illegible] [illegible] dy - dy [illegible] = V dV, [illegible] al [illegible]; che qualunque sarà, per esempio, [illegible] qualsivoglia [illegible] la distanza y dal punto medio della [illegible] vibrazione [illegible] [illegible] comunicazione di moto fra un elemento, e l'altro della corda [illegible]; giacchè una corda non può oscillare, salvo che intiera, o divisa in parti eguali; si rende necessario, che [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] corrispondano come $n^2 y : N^2 Y$; cioè a dire in ragione composta dei quadrati dei numeri delle parti eguali, nelle quali si divide la corda, e della [illegible] lontananza dai punti medj delle vibrazioni; e quindi gli n^2 hanno da essere numeri quadrati presi dalla serie 1, 4, 9, 16, 25, &c. Queste riflessioni pongono in chiaro, che le predette formole somministrano soltanto le curve da me determinate, le quali sono equilibrate, e permanenti; conservando sempre la stessa natura, siccome quelle, che o si numerano fra le curve semplici, alle quali si accomoda la corda, quando rende un suono solo, o nascono dalla loro composizione, la quale per quanto si vibri la corda, sempre sussiste, e fa sì che in tutti analoghi torni essa corda a riprendere la primiera figura, prescindendo dalle resistenze.

Che se la corda si obbliga a prendere una figura diversa dalle stabilite, non avendo questa gli elementi equilibrati, si comunicano essi il moto, e la detta figura talmente

si

si varia, e che più non ritorna la corda a ripigliarla; e perciò riceverà il nome di sbilanciata, e di passaggiera. Mi serve di esempio una corda costretta dalla penna di un salterello a ripiegarsi in un angolo rettilineo, e lasciata in libertà, costantemente si riduce ad una alla pristina figura, e non più [illegible] spedita.

L'indagare poi la serie di questi casi, il tempo impiegato dalla corda nel passare dal primo al secondo stato di quiete, e la figura della stessa nel passaggio proposto, è lo giudico un problema difficilissimo; ma a tale impresa non mi accingo, quanto io ardisca altrettanto inutile alle musiche vibrazioni. Io sono persuasa che la corda possa ridursi ad una figura di equilibrio, e che la irregolarità della prima vibrazione non riesca all'orecchio sensibile. Applicato un ostacolo leggiero nel punto estremo S (fig. 17) della terza parte BS della corda AB, pria accennata, all'orecchio distinguendo dall'altra parte il suono proprio della corda divisa in tre parti eguali, e che tocca sensibile la [illegible] toccare così, che col mezzo di una prontissima congiunzione di moto si riduce la corda alla figura di permanente ed equilibrata, la quale per altro [illegible] con altra figura quando il suono predominante delle terze parti si accompagna quelli delle loro parti aliquote, siccome di fatto succede.

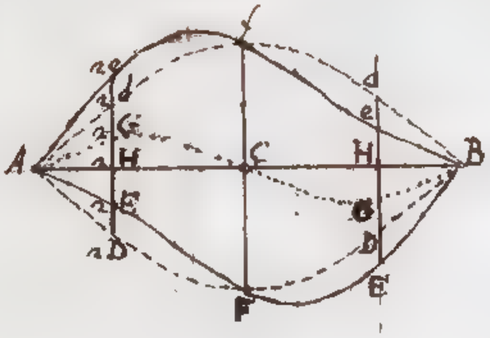


Fig. 38.

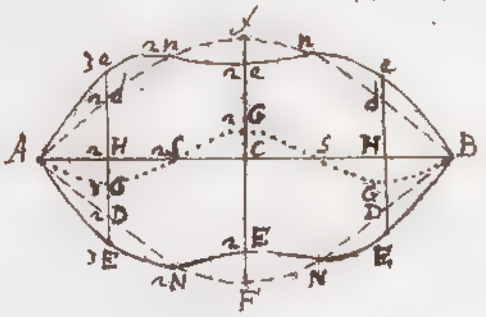


Fig. 39.

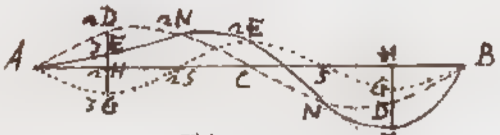


Fig. 41.

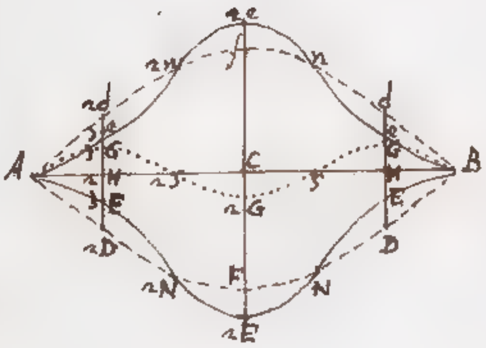


Fig. 40.

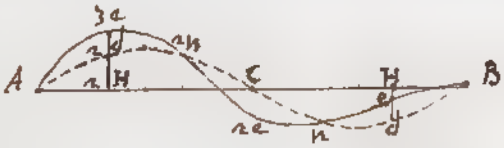


Fig. 42.

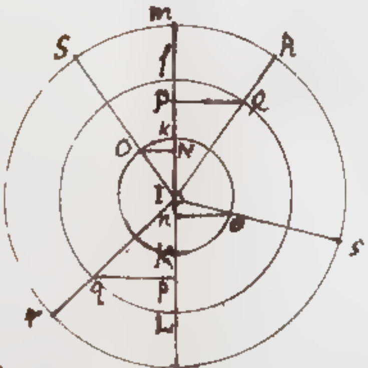


Fig. 44

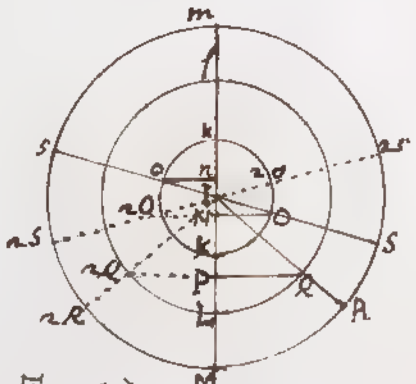


Fig. 43.

Dalla Corda
ovvero
Fibra Elastica
Schediasmi
Fisico-Matematici
Del Conte
Giordano Riccati
Nobile Trevigiano
Parte Seconda.

Prefazione

Agli otto Schediasmi pubblicati l'anno 1767. ne aggiungo altri cinque sopra lo stesso argomento *Delle Corde, ovvero Fibre elastiche*: darò conforme il mio stile a chi legge una succinta idea dei predetti cinque Schediasmi.

IX., e X. Nelle indagare le vibrazioni &c.

Nelle indagare le vibrazioni della pelle
del tamburo, e delle corde inegualmente gros=
se, che somministrano l'argomento agli
Schediasmi IX., e X., seguito lo stesso meto=
do da me usato in riguardo alle oscillazioni delle
corde egualmente grosse, cercando prima quelle
curve, a cui possono adattarsi, fornite dalla
condizione, che le forze acceleratrici delle mini=
me fibre accettino la proporzione delle cor-
rispondenti ordinate, ~~in sì fatta guisa~~ e
da esse curve deducendo poi i tempi delle
vibrazioni. In sì fatta guisa si determinano
i suoni tutti unici, e dirò così solitarj, che
può rendere per esempio una data corda,
i quali richiedono, che le mentovate forze
stiano come le ordinate, e che tutti i punti
della corda giungano nello stesso istante in
quel sito, che occupano, quando la corda stessa sta
in equilibrio, ed in quiete;* Le predette
curve le chiamo semplici, perchè accomodan=
dosi ad esse il corpo sonoro, produce un suono
solo # Le curve composte nascono dalla unione
delle semplici, e quante curve semplici concor=
rono nella formazione della composta, altrettanti
suoni misti, ed incomposti si fanno sentire congiuntamente
all'orecchio. Quando si batte una corda,
non ne risulta mai un suono solo; ~~sebbene~~
se non che il suono più grave è talmente pre=
dominante, che copre gli altri, nè gli lascia
discernere, ~~se non~~ sebbene con molta attenzione.
// Se stimolata una corda, si generano i suoni
1, 2, 3, 4, 5, 6 &c., i suoi punti non
si riducono in linea retta nel medesimo mo=
mento, ma si avvera bensì la condizione,
che nel tempo di una vibrazione del suono 1.
passano da uno stato all'altro di quiete
assoluta. Si danno altresì gli stati di quiete
relativa proprj dei suoni 2, 3, 4, 5, 6, &c.
e l'intervallo di tempo fra due prossimi stati di quiete,
benchè relativa, si rende manifesto al

senso

* ed in un altro istante parimente pervengano allo stato di quiete, impiegandovi nel passaggio da uno stato all'altro di quiete quel tempo, che esige il suono prodotto.

a capo

// a capo

Prefazione

senso, e serve per ~~discernere~~ distinguere i detti suoni

Che se i suoni, che può rendere una corda, si corrispondano in ragioni assimetre, e che ~~molti di quelli~~ almeno due se ne si congiungano insieme, la corda non può mai pervenire ad uno stato ~~assoluto~~ di quiete assoluta. Ciò non ostante gli stati di quiete relativa conformi ai diversi suoni servono di appoggio all'orecchio per conoscere i suoni stessi; e conciossiachè il più grave è assai più vigoroso degli altri, se ne forma idea distinta, ed agevolmente si intuonerà. Di tal natura si è la corda, la cui grossezza stia inversamente come la radice cubica del quadrato-quadrato delle ascissa, della cui vibrazioni tratterò nell'esempio III. dello Schediasma X.

Pensa il Dottissimo Sig.r Leonardo Eulero nel Tomo III. della Società Real di Turino pag. 54, 55, che la predetta corda non ~~sia suscettibile~~ possa concepire di vibrazioni regolari ed isocrone, se non in alcuni incontri, che dipendono dallo stato iniziale, al quale la corda è stata ridotta. Se la corda si ripiegherà in una di quelle curve, dalle quali un suono solo ne nasce, le sue vibrazioni saranno regolari, ed isocrone, e nel tempo ~~conveniente~~ corrispondente al suono prodotto passerà da uno stato all'altro di quiete assoluta. Ma se la curva sarà composta di ~~molte~~ più d'una curva semplice; benchè non si dia stato di quiete assoluta, esistono nulladimeno gli stati di quiete relativa, il che è sufficiente perchè si possa con verità asserire, che la corda sia capace di vibrazioni regolari, ed isocrone.

ciò

Ed in fatti se con qualche artifizio riuscisse di formare una tal corda, ne distinguerebbero perfettamente i suoni, e specialmente il più grave e predominante, il quale si intenderebbe con esattezza. Confermo evidentemente la mia asserzione coll' esempio dei cilindri sonori, che di un suono l'orecchio forma una giusta idea, quantunque l'aggregato loro in proporzioni sorde si corrisponda. Se il nostro famoso Autore si fosse accorto, che la corda può produrre una mistura di suoni, ci avrebbe veduto più addentro nella presente materia.

Non sono capaci di vibrazioni regolari, ed isocrone quelle corde, che non possono acconciarsi a curve dotate della proprietà, che le forze acceleratrici serbino la ragione delle ordinate; e quindi, che le predette corde non possano mai vibrare colla legge di un pendolo a cicloide. Non si danno in esse stati di quiete nè assoluta, nè relativa, comuni alle corde intiere, ma una particola vi giunge prima, e l'altra dopo. Inoltre sono varj gli intervalli di tempo fra due stati prossimi di quiete, non solo in diverse particole, ma ancora nella particola stessa; dimodochè il moto riesce sempre incerto, nè può dall' orecchio apprezzarsi; e questa è la vera idea di que suoni, che si chiamano falsi, la quale sino al presente non so, che sia caduta in mente a veruno. +

+ Da una tale idea dipende la spiegazione di un curioso fenomeno, cioè per qual cagione alcuni siano forniti di orecchio musico, ed altri no. Io penso, che ciò dipenda dalla struttura del nervo uditorio, mediante la quale sia esso atto, o non atto a concepire vibrazioni regolari.

Le corde idonee ad oscillare colla legge di un pendolo cicloidale, o si adattino a curve semplici producenti un suono solo, o pure

si pieve in nove composte relative ad un aggregato di più moti, si vibrano sempre talmente equilibrate, che una particola non influisce nel movimento delli altra. Con tale condizione si renderia note le loro vibrazioni se non altro meccanicamente mediante l'ajuto del moto trattorio. Ma se la corda si accomoda ad una figura qualunque delle sopra mentovate sbilanciata, segue tosto comunicazione di moto fra le particole, sintanto che ne risulti una figura equilibrata, ed ogni punto sia fornito della conveniente velocità. Che ciò succeda, ed in brevissimo tempo, si rende manifesto dal suono giusto, che rende la corda. Darei frattanto le ben dovute lodi a quel Geometra, che sapesse determinare il moto della corda dal primo istante di quiete sino a quel momento, in cui si riduce ad una figura equilibrata congiunta colle velocità competenti. Quanto a me, non mi arrossisco di confessarmi ~~la mia~~ insufficiente a tentare un così astruso problema.

Le particole delle corde, che generano un suono falso, si comunicano sempre il moto, senza che possano mai formarsi ~~sprigarsi~~ in tali nove, nè concepiro tali velocità che le forze acceleratrici cangino lo stato ~~influiscano~~ soltanto in quelle particole, a cui sono applicate. Da ciò dipende l'incertezza del suono, e quella insuperabile difficoltà, che si incontrerebbe, accingendosi all'impresa di rintracciare il moto di tali corde.

Si conchiuda dunque, che l'unica maniera di trattare con frutto, e con verità delle vibrazioni delle corde sonore capaci di vibrarsi regolarmente, consiste nel ricavare prima le nove semplici, nelle quali

quali ripiegandosi producono un suono solo, e passar poi colla composizione di detti moti alla generazione di quelli, che sono vale a dire ad un ~~aggregat~~ aggregato di moti di quelli soli; e non in altra maniera si possono permanentemente vibrare le nostre corde.

Conciossiachè le curve semplici, alle quali possono accomodarsi la pelle del tamburo, e le corde triangolari, e coniche, siano espresse da equazioni differenziali, in cui non riesce di separare le variabili, vedrà il Lettore con qual artifizio per me si determinino col calcolo i tempi delle loro vibrazioni, cercando primitivamente si fatti tempi, quando le curve sono fornite di un numero ristretto di ventri, e passando poi a stabilire i tempi prossimi delle vibrazioni, quando il numero dei ventri è finito. La similitudine fra i volumi interi, e le loro parti dei settori circolari componenti la pelle del tamburo, e delle corde triangolari, e coniche mi aprono l'adito al mentovato transito dalla legge dei tempi adattata al numero ristretto dei ventri, alla legge generale.

XI. Quantunque il metodo, col quale tratto delle vibrazioni sonore dei cilindri, io l'abbia preso dall'Appendice sopra le curve elastiche aggiunta dal chiarissimo Signor Leonardo Eulero alla sua famosa Opera Methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes; nulladimeno ho presa risoluzione di non tener celato quello trovavo fra i miei manoscritti, e perchè mi sono ingegnato di spargere qualche lume sopra l'oscuro argomento, e perchè l'ho arricchito di qualche scoperta, e perchè mi è riuscito di notare alcun piccolo neo, che non manco di segnare opportunamente, nella

nelle sublimi meditazioni del profondissimo Autore.

Quella forza, alla quale il Signor Eulero dà il titolo di elasticità assoluta di una lamina, la asserisce egli, senza dimostrarlo proporzionale al prodotto della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del quadrato della grossezza. Se per la strada da me calcata rispettivamente ai cilindri avessi cercato il valore della predetta forza, ben mi sarebbe riuscito di provarla in ragione composta della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del cubo non del quadrato della sua grossezza. Lo sbaglio avvertito influisce nella legge dei tempi delle vibrazioni delle lamine elastiche stabilita dal nostro Autore, alla quale non si adattano gli esperimenti se non nella circostanza, che le lamine sieno egualmente grosse.

In riguardo ai cilindri io dimostro la mentovata forza in ragione composta del quadrato-quadrato del diametro del cilindro che si vibra, e della rigidità della materia, dalla quale è formato. Questa forza per altro anzi che affermarla eguale all'elasticità del cilindro, merita di esser chiamata equipollente alla stessa elasticità, conforme dalle mie dimostrazioni chiaramente raccogliesi.

Ma il principale motivo, che mi ha indotto a donare al pubblico lo Schediasma XI., si è, che il Signor Eulero ometta la serie dei suoni, che può produrre una lamina, pretendendo, che un nodo, o sito di quiete non possa mai cadere alla metà della lunghezza della lamina stessa. ~~Io dimostro~~ Faccio vedere il contrario rispet-

tivamente

riguardo ai cilindri, e la mia dimostrazione
s'accomoda interamente alle lamine. L'espe=
rienza poi favorisce i miei pensamenti;
imperciocchè sostenendo in bilico la lamina
sopra un dito, ed indi battendola, rende
un suono chiaro, che non riesce punto im=
pedito pastojato dal dito, che la tocca
in un sito immobile.

Verso il fine dello Schediasma insegno
la maniera di stabilire la proporzione fra
le rigidità della materia, onde varj cilindri
sono composti.

Chiudo finalmente la mia fatica col
determinare la ragione fra le lunghezze,
ed i diametri dei cilindri gravi, ed acuti;
acciocchè rendano suoni ugualmente
forti, e aggradevoli. Essendo di poco
uso gli strumenti musici composti di ci=
lindri, e trovandosene in picciola quan=
tità, non hanno potuto i pratici colle iter=
ate esperienze ridurli a quella perfezione,
di cui sono capaci. Perciò metto sotto
gli occhi di chi legge una tavola, che per
lo spazio di due Ottave contenga le misure
relative della lunghezza, e dei diametri dei
cilindri, ed aggiungo le avvertenze neces=
sarie per ~~[illegible]~~ valersi di essa tavola
con profitto.

XII. La comunicazione del moto fra due
corpi si effettua senza dubbio per opera di una
forza medica inviscerata nei corpi stessi, che
accelera uno, e ritarda l'altro, o pure li accelera,
o li ritarda secondo la varietà delle circostanze ambedue. Maravigliosa cosa si è,
che assumendo [illegible] Date le velocità iniziali,
e le masse di due corpi perfettamente molli
e elastici, ne risultano sempre le stesse due
serie di velocità dal principio della comunica

zione

zione del moto sino al suo compimento, qualunque sia la natura della forza media predetta. Dipendendo pertanto essa forza media dalla rigidità, e dalla figura dei corpi; chiaramente si vede, che queste nulla influiscono nella determinazione delle velocità corrispondenti dei corpi, fra i quali segue la comunicazione del movimento. Inoltre giunta ad arbitrio la forza media l'aggregato dei corpi avranno sempre perduta la stessa massima misura di forza viva, quando compiuta la comunicazione del moto colle leggi dei corpi molli, cammineranno essi corpi con pari velocità, ed avranno sempre ricuperata la forza viva primiera, quando sarà giunta al termine la partecipazione del moto giusto ai canoni dei corpi elastici. Si aggiunga, che si impiegheranno costantemente due tempi uguali nel passaggio delle velocità primitive alla media comune ai due corpi, e dalla media alle terminali.

La diversa rigidità, e la figura dei corpi cagiona gli unici effetti di alterare gli spazj corsi dai corpi nell'atto di partecipare il moto, ed i tempi impiegati a percorrerli. Per stabilire questi spazj, e questi tempi, egli è di uopo che sia cognita la indole, e l'energia della forza media. E perchè ciò si ignora generalmente, mi è caduto in pensiero di supporre, che il moto si partecipi mediante una corda elastica, le di cui forze rispettivamente alle distensioni sono state da me determinate nello Schediasma I. In tale ipotesi io trovo gli spazj passati dai corpi, ed i tempi spesi nel passarli, e le velocità, che in ciascun istante ai corpi competono.

Seguendo la minima compressione dei cilindri la stessa legge della minima distensione della corda, mi è riuscito di scoprire il tempo, in cui due cilindri della stessa materia, e forniti di basi uguali si comunicano

il

il moto; urtando direttamente uno corpo coll'altro con velocità relativa, che sia minima in riguardo alla rigidità della materia, onde i cilindri stessi sono formati.

Colla scorta dei cilindri, e dei parallelepipedi, nei quali è conosciuta la relazione fra le compressioni, e le forze comprimenti, si può determinare il tempo, in cui urtandosi con minima velocità relativa, si comunicano il moto altri corpi; e questa proporzione è la conforme con cui comincio.

XIII. Poichè inutilmente ho tentata la correzione della nuova scoperta della ghianda di un pendolo, mettendo a computo la distensione della corda, alla quale è appesa la ghianda stessa, mi ristringo a determinare nello Schediasma XIII. il massimo allungamento nella corda prodotto.

Seguita un Appendice allo Schediasma I., nella quale sciolgo una difficoltà recentemente proposta dal dottissimo Padre D. Girolamo Saladini. Nel citato Schediasma al numero XX asserisco, che nelle corde la rigidità ~~che~~ ripugnante alle distensioni, è assai maggiore della tenacità, che al rompimento si oppone. Considerando il P. Saladini la rigidità come una resistenza, ne inferisce, che la corda non si potrà allungare, senon applicandole una forza maggiore della rigidità; ~~ma questa forza supera di molto la tenacità~~ Dunque se la forza sarà minore della rigidità, e più grande della tenacità, la corda si romperà senz'allungarsi; il che è un manifestissimo assurdo.

La soluzione dipende da ciò, che la rigidità naturale è una forza equilibrata da un'altra forza nascosta nella corda, il quale equilibrio fa sì, che la corda stessa conservi la sua figura. E giacchè gli equili-

bej sono rotti da qualsivoglia benchè picco-
lissima forza, la corda verrà allungata da
qualunque menomo peso.

Osservo che quando da me si afferma, la tenacità essere
molto più piccola della rigidità naturale,
parlo di quella tenacità, che sensibilmente
si manifesta negli esperimenti, e che col
mezzo della tensione si vince. A tale te-
nacità fa di uopo aggiungere l'altra, che
fa contrasto colla forza, la quale tiene equi-
librata la rigidità naturale. Sicchè
la totale tenacità supererà la rigidità natu-
rale, ed artificiale, la corda rimarrà illesa,
e solamente qualora quella sarà maggiore
di quella, la corda si spezzerà.

Indice degli Schediasmi.

Schediasma IX. Delle Vibrazioni del Tamburo. pag. 1.

Schediasma X. Delle Vibrazioni delle Corde inegualmente grosse. p. 9.

Schediasma XI. Delle Vibrazioni sonore dei Cilindri. 22.

Schediasma XII. Della Communicazione di moto, tra due Corpi molli, o elastici perfettamente, e specialmente di quella, che si effettua col mezzo di una Corda elastica. 1613.

Schediasma XIII. Determinare il massimo Allungamento, che il Peso di un Pendolo produce nella Corda, a cui è attaccato. p. 19.

Appendice allo Schediasma I. p. 33.

Schediasma IX

Delle Vibrazioni del Tamburo.

Schediasma ~~Fisico Matematico~~

del

~~Signor Conte Giordano Riccati~~.

I. Il commercio di lettere, che coltivai per qualche tempo col celebre Signor Giuseppe Tartini per istabilire i veri principj della armonia, mi porse occasione di rintracciare da qual legge vengano regolate le vibrazioni della pelle di un tamburo. Ella è massima comunemente ricevuta, che per istabilire i tempi delle oscillazioni di un corpo sonoro, sia prima di mestieri d'indagare la curva, alla quale oscillando si accomoda. Mi posi dunque a cercare la curva, a cui si adatta nell'atto di vibrarsi la pelle di un tamburo, ed i calcoli mi guidarono alla formola, che sendo stata proposta agli Analisti dal Conte Jacopo Riccati mio Padre, Riccatiana suole chiamarsi. Non competendo ad essa quelle condizioni, che son necessarie, acciocchè si possa ottenere la separazione delle variabili, ~~adiacendo~~ mi rivolsi al Trattato del P. Vincenzo Riccati mio Fratello *De usu motus tractorii in constructione aequationum differentialium*, e coi metodi quivi insegnati tentai la costruzione adoperando una trattoria di base curvilinea, e l'averei condotta a termine, se mi fosse riuscito di determinar col calcolo la costante, che in essa formola ha luogo. Questa difficoltà, che non potei superare, mi indusse ad abbandonare l'impresa, e forse non averei più ad essa rivolti i pensieri, se uscito al pubblico il terzo Tomo dell'Accademia di Torino, non ~~mi~~ mi fosse caduta sotto degli occhi una profonda Dissertazione del rinomatissimo Signor Leonardo Eulero, il cui titolo *Recherches sur le mouvement des cordes inégalement grosses*. Conciossiachè i minimi settori

circolari

circolari, che compongono la pelle del tamburo, si possano considerare come corde di grossezza variabile, l'analogia dell'argomento mi invogliò di prender nuovamente per mano il lavoro, che più anni fa aveva già tralasciato. Ottenuta una più elegante costruzione col mezzo di una trattoria di base rettilinea, urtai nel solito scoglio di non poter da essa costruzione dedurre analiticamente la determinazione della costante.

II. Fui costretto adunque di battere una nuova strada, considerando che uno dei minimi settori componenti la pelle si crebbe diviso in un numero infinito di piccolissimi elementi tutti fra loro unisoni, i quali da circoli concentrici, ed immobili siano divisi. Prendendo la pelle del tamburo prendere innumerabili figure fornite di uno, di due, di tre ventri, &c., il supporre il numero dei ventri infinito, egli è un caso particolare del problema, che mi sono proposto, e lo stabilimento della costante in questo caso, mi apre l'adito a determinarla generalmente. I minimi elementi, che formano il mentovato settore, sono adequatamente di figura rettangolare, ed i tempi delle loro vibrazioni accettano la legge propria delle corde egualmente grosse, la quale si è resa nota, deducendola dalla figura, a cui si accomodano le predette corde oscillando; che ci manifesta il competente valore della costante. Con tale artifizio quella legge delle vibrazioni del tamburo, che non posso arrivare col computo descrivendo la curva fornita di un numero finito di ventri, a cui può adattarsi la pelle del tamburo, mi si rende palese, mercè la descrizione della curva confacente al numero dei ventri infinito, ed il problema, che era divò così più che trascendente,

divina

divieno di natura più unita, e si cangia in precedenza, siccome quello, che dipende dalla restituzione del circolo.

~~[illegible]~~ X ~~[illegible]~~

X da un circolo uguale a quello, che così forte analoghe compassa altrettanto &c

III. Il ~~due~~ descritto artificio gli ho adattato alle corde di ineguale grossezza, e mi è riuscito di ridurre a computo i tempi delle loro vibrazioni: ma questo sarà in parte l'argomento dello ~~altro~~ schediasma X. ~~[illegible]~~ Confesso ~~[illegible]~~ col ~~[illegible]~~ lodato Signor Eulero nella citata Dissertazione alla pag. 24. ~~ingenuamente confesso~~; che sino al presente sono stati inutili tutti gli ~~[illegible]~~ sforzi per trovare in generale l'integrale completo della equazione, che esprime il movimento di una corda inegualmente grossa, avendo per altro scoperto una infinità di casi, nei quali l'integrazione si ottiene, ed il moto della corda si può per conseguenza determinare.

e i cui volumi corrispondenti a qualunque ascissa sono sempre fra loro simili

IV. Ma tornando al tamburo, darò prima, ponendo in opera il moto vettorio, la

costruzione

Schediasma IX.

costruzione della curva, a cui vibrandosi può accomodarsi la pelle del tamburo, la quale per essere condotta alla intera perfezione, richiede che si determini la tante volte nominata costantex. Non essendomi mai riuscito di dedurne il valore qualunque dalla costruzione suddetta, lo raccoglierò col mezzo dell'accennato artificio, onde si possano più facilmente delineare la nostra curva, posto che siano in pronto gli organi atti a descrivere le competenti rettorie. Stabilita la costante, si renderà a tutti noto col calcolo il tempo di una vibrazione della pelle, il quale si riferisca in data proporzione alla radice di essa costante.

x il che ho potuto ottenere soltanto meccanicamente.

<u>Determinare la curva, alla quale si adatta nello atto di vibrarsi la pelle di un tamburo.</u>

V.... Sia A'A (fig. 1.) il diametro della pelle del tamburo; C il centro, e la linea Cγ perpendicolare ad A'A ed alla pelle suddetta. Supponendo, che la pelle sia per principiare una vibrazione, si concepisca essa tagliata da un piano, che passi pel centro C, e sia normale alla pelle, mentre si ritrova in istato di equilibrio, e di quiete, onde ne risulti la curva A'c'γcA: si cerca la natura di questa curva. Dongo A'A = L, la massa della pelle = M; la somma delle forze, che uniformemente tendono la pelle tutto all'intorno, = P, l'ascissa AH = x, il suo elemento HK = dx, l'ordinata HD = y; il suo incremento = dy, l'elemento della curva De = ds, e finalmente il raggio osculatore ID = Ie = r.

Rappresenti CenL (fig. 1.) un menomo settore della pelle del tamburo, ed espresso

per

per 4b la circonferenza del circolo, il cui raggio = c, sarà la circonferenza di essa pelle = $\frac{2bL}{c}$. Stabilita $e2e = \frac{2bL}{kc}$, è facile da dedursi la conseguenza, che la porzione di forza applicata ad $e2e$ si eguaglierà a $\frac{p}{k}$. Giacchè $CA = \frac{1}{2}L$, $AH = x$, resterà $CH = \frac{1}{2}L - x$. Per la similitudine dei settori $CeA2e$; $CGH2G$ abbiamo

$$CA : CH :: e2e : G2G$$
$$\tfrac{1}{2}L : \tfrac{1}{2}L - x :: \frac{2bL}{kc} : \frac{4b \cdot \overline{\tfrac{1}{2}L - x}}{kc},$$

e perciò sarà l'aja $G2G2L = \frac{4b}{kc} \cdot \overline{\tfrac{1}{2}L - x} \cdot dx$.
Troveremo l'infinitesima porzione di massa spettante all'elemento di pelle $G2G2L$ col mezzo della seguente analogia

$$\frac{2bL}{c} \cdot \frac{L}{4} = \frac{bL^2}{2c} : M :: \frac{4b}{kc} \cdot \overline{\tfrac{1}{2}L - x} \cdot dx : \frac{4M \cdot \overline{\tfrac{1}{2}L - x} \cdot dx}{kL^2}.$$

Condotta la minima tangente DP, eP (fig. 2.), e compiuto il parallelogrammo PN, sappiamo per i canoni della forza composta, che lo stiramento $\frac{p}{k}$ della pelle eD sta alla forza f, che la spinge per la direzione PN, come $DP : PN$: ma $DP : PN :: ?D : De$; dunque analiticamente $\frac{p}{k} : f :: v : ds$, e perciò $f = \frac{p\,ds}{kv}$ si è quella forza, che stimola la particola De per la direzione $P?$, la quale coincide adequatamente colla direzione DH, supponendosi minima la saetta CZ, e la curva AZA' pressochè parallela alla linea AA'. Per un tal motivo potendosi confondere ds con dx, avremo $f = \frac{p\,dx}{kv}$.

Avendo trovato $\frac{4M \cdot \overline{\tfrac{1}{2}L - x} \cdot dx}{kL^2}$ uguale

alla

alla massa della nostra particella $D e$, se dividerremo la forza f per la detta massa, si scoprirà la forza accelerattrice $= \dfrac{PL^2}{8Mr\cdot\overline{\tfrac{1}{2}L-x}}$.

Si rifletta, che se tutti i punti della palla hanno da giungere al piano $A'CA$ nel tempo stesso, le forze accelerattrici debbono stare come le ordinate $HD = y$, e per conseguenza dee verificarsi l'equazione $\dfrac{PL^2}{8Mr\cdot\overline{\tfrac{1}{2}L-x}} = \dfrac{y}{a}$. (1.)

Posto che si prenda siccome costante l'elemento dx dell'assissa, è noto essere $r = \dfrac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$: ma nella curva $A'C'DeA$ è dy incomparabile con dx; dunque $r = \dfrac{dx^2}{-ddy}$. Surrogato questo valore nella formola (1), avremo $\dfrac{-PL^2\,ddy}{4M\cdot\overline{\tfrac{1}{2}L-x}\cdot dx^2} = \dfrac{y}{a}$, o sia

$-\dfrac{aPL^2}{4M}\cdot\dfrac{ddy}{y} = \overline{\tfrac{1}{2}L-x}\cdot dx^2$ (2.), e facendo

$\dfrac{aPL^2}{4M} = g$ (3), $\tfrac{1}{2}L-x = q$ (4), e conseguentemente $-dx = dq$, $-\dfrac{g\,ddy}{y} = q\,dq^2$ (5.).

VII. Affine di ridurre una tal formola alla prima differenza, pongo $y = c\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{-v}{c}}$, onde si abbia $dy = -c\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{-v}{c}}dv$; $ddy = -c\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{-v}{c}}ddv + c\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{-v}{c}}dv^2$, e $\dfrac{ddy}{y} = -ddv + dv^2$. Dalla sostituzione di questo valore nella formola (5) ne nasce $g\cdot ddv - dv^2 = q\,dq^2$ (6.). Facciasi $dv = z\,dq$, e differenziando, $ddv = dz\,dq$. Avverto, che supponendosi costante dx, è parimente tale $dq = -dx$. Surrogati nell'equazione (6.) in cambio di dv, e di ddv i

loro

loro valori, ci si presenterà $g\,dz\,dq - g^2dq^2 = q\,dq^2$; e dividendo per dq, $g\,dz - g^2dq = q\,dq$ (7.), in cui sono sparite le seconde differenze.

VII. Questa formola è contenuta nella generale proposta negli Atti di Lipsia agli Analisti dal Co. Jacopo Riccati mio Padre, acciocchè determinassero gli infiniti casi, nei quali si possono separare le variabili, e non accordandosi con veruno dei detti casi, io non so la maniera di ottenere la bramata separazione. Ma giacchè non è noto il metodo di sviluppare le incognite nella nostra formola, tentiamone la costruzione col mezzo del moto trattorio, e facciamo uso del metodo contenuto nel Capitolo VIII. dell'Opera del P. Vincenzo Riccati mio fratello <u>De usu motus tractorii in constructione aequationum differentialium</u>.

La predetta formola si scriva così $\frac{g^2+q}{g}\cdot dq = dz$. Pongo $g = \varphi + g^2 + q$; onde si abbia $0 = d\varphi + 2gz\,dz + dq$, e moltiplicando per $\frac{q}{g}$, $0 = \frac{q\,d\varphi}{g} + q\cdot\frac{2gz\,dz + dq}{g}$, la qual formola aggiunta alla prima parte della equazione da costruirsi, non la muta. Sarà perciò $\frac{g^2+q}{g}\cdot dq + q\cdot\frac{2gz\,dz+dq}{g} + \frac{q\,d\varphi}{g} = dz$. Faccio nuovamente $\frac{q\,d\varphi}{g} = -dp$ (8), e novo $\frac{g^2+q}{g}\cdot dq + q\cdot\frac{2gz\,dz+dq}{g} - dp = dz$, ed integrando $\frac{g^2q+q^2}{g} - p = z$ (9.).

Egli è di uopo prima descrivere il

il luogo, in cui le assisse IC (Fig. 3.) sono costanti $= g$, e le ordinate $Ce = z$, il quale, come è noto, sarà alla linea retta. Fatta dunque $CI = g$, si meni alla stessa la CN normale, in cui si debbono prendere le $Ce = z$. Si concepisca poscia descritta la curva CZD delle coordinate $IH = q$, $HZ = p$, e si conduca ZL parallela ad IC, ed Ze, che tocchi la curva CD nel punto Z. Poichè $-dq : dp :: ZL = g - q = \overline{gz^2+q} : Le$; sarà $Le = \dfrac{\overline{gz^2+q} \cdot dp}{-dq}$: ma conforme l'equazione (4.) $dp = \dfrac{-q\,dq}{g}$; dunque $Le = \dfrac{\overline{gz^2+q} \cdot q}{g}$; dunque sottratta $LC = p$, resterà $Ce = \dfrac{\overline{gz^2+q} \cdot q}{g} - p = z$, siccome richiede la formola (9.). Per la qual cosa la curva CZD si può descrivere a modo di trattoria, che ha per base la linea retta CN, in cui si debbono prendere le $Ce = z$.

VIII. Acciocchè si determini la condizione, colla quale la trattoria CZD dee descriversi, si rifletta essere $eL = \dfrac{\overline{gz^2+q} \cdot q}{g}$, ed $ZL = \overline{gz^2+q}$. Quindi rispettivamente a ciascuna $Ce = z$ dobbiamo delineare la curva eZZV, le cui assisse $eL = \dfrac{\overline{gz^2+q} \cdot q}{g}$, e le ordinate $LZ = \overline{gz^2+q}$; di modo che si abbia una serie di infinite curve col parametro variabile $Ce = z$, il quale in ciascuna è costante. Dipoi fatto moto da C verso e, si delinei la trattoria CZD in tal guisa, che quando il filo è pervenuto in e, il punto descrivente Z sia nella curva

eZV

Schediasma IX.

Aggiunta da farsi al segno * num.^ro VIII. pag. 9.

Determineremo la strada, per cui dee muoversi il vertice Z della direttrice e Z 7 V colla condizione, che l'asse Z O si conservi sempre parallelo alla linea M e, descrivendo la curva C Z B, le cui ascisse $CM = Ce + eM = z + \frac{gz^4}{4}$, e le ordinate $MZ = \frac{gz^2}{2}$. Si costruisca la predetta curva col mezzo di due parabole coniche, la prima delle quali ha le ascisse $= Ce = z$, e le ordinate $MZ = \frac{gz^2}{2}$; e la seconda le ascisse $eM = \frac{gz^4}{4}$, e le ordinate $MZ = \frac{gz^2}{2}$. Si adatti a queste due parabole la stessa ordinata, e congiunte in una somma le corrispondenti ascisse, si tagli uguale ad essa somma la linea CM, e fatta MZ uguale all'ordinata comune ad ambe le parabole, il punto Z apparterrà alla curva C Z B.

IX. Nello stromento, col quale lo accuratissimo Signor Marchese Giovanni Poleni descrive la più semplice trattoria, la direttrice, ch'è una linea retta, cammina sempre parallela a se stessa sopra un'altra linea retta. Ora se la direttrice, e la strada, per cui si muove, si cangeranno nelle linee curve e Z 7 V, C Z B, si otterrà non difficilmente da un perito Artefice il fabbricare un organo atto a delineare la nostra trattoria C 7 D.

X. Quando &c.

e z V, il cui parametro Ce = z, ed il principio delle assisse nel punto e. Finalmente segnata CN = C7 = g, si determini lo angolo CNK = L7e, ed accaderà, che a Ce = z corrisponda CK = q. Quindi descritte parallele a Ce, CK le due linee KG, eG, che si intersechino nel punto G, e fatta passare per gli infiniti punti G la curva CGR, si averà sempre CK = q, KG = z, e soddisfarà essa curva alle equazione (?) $gdz - gz^2dq = qdq$. Le cose dette, e le analisi rendono manifesta la dimostrazione.

e onde ne risulti la analogia $L7 : Le :: CN \cdot CK$
$gz^2+q : \frac{gz^2+q \cdot q}{g} :: g : q$,

Conosceremo la natura della curva e z 7 V, ponendo le assisse $eL = \frac{\overline{gz^2+q} \cdot q}{g} = S$, e le ordinate $L7 = gz^2+q = T$. Da questa seconda equazione si raccoglie $T - gz^2 = q$. Sostituito un tal valore nella prima, ci si presenterà $\frac{T \cdot \overline{T-gz^2}}{g} = S$, luogo alla parabola Apolloniana, il cui lato retto $= g$, considerata Ce = z in qualità di costante. Taglio $eM = \frac{gz^4}{4}$, ed al punto M conduco la normale $MZ = \frac{gz^2}{2}$, e poscia delineo PZO parallela ad NL. Alla assa ZO, col vertice in Z, e col lato retto = g descritta la parabola e Z 7 V, che passerà pel punto e, sarà essa la direttrice della trattoria C7D rispettivamente a Ce = z. Avverto, che tutte le parabole direttrici hanno lo stesso lato retto = g, e variano solo nella posizione dipendente dai valori della linea $eM = \frac{gz^4}{4}$, $MZ = \frac{gz^2}{2}$, i quali si mutano al cangiarsi della linea Ce = z.

*X. Quando CK = q = 0, e che di più, come nella Fig. 2, a cui è adattata la Fig. 3,

a

a C corrisponde il massimo valore di $y = c = C7$, anche $Ce = z = o$, dimodochè il punto C coincide con ambo i punti k, e. Avendo di sopra messo $y = c\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{-v}{c}}$, ed essendo $-dy = c\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{-v}{c}} dv$, se ne deduce $\frac{dy}{y} = -dv$, o sia $-\frac{dy}{y} = dv$: ma si è inoltre stabilito $dv = z\,dq$; dunque $-\frac{dy}{y} = z\,dq$, ed allorachè $y = c$, $-\frac{dy}{dq} = cz$. Ora richiedendo il massimo valore di y, che sia $-\frac{dy}{dq} = o$, avremo in tal caso $cz = o$, il che non può verificarsi, se non si annulla la z.

A $q = \frac{1}{2}L = CA$ dee riferirsi $z = \infty$. Giacchè $-\frac{dy}{y} = dv$, avremo $ly = v$ nel ramo delle ordinate decrescenti della logistica, la cui suttangente $= 1$, ed il protonumero $= c$. Nel punto A (fig. 2.) $y = o$, e perciò $ly = v = \int z\,dq = \infty$; il che intanto accade, inquanto che nel detto punto A (fig. 3.) è $AR = z = \infty$. Non lascierò di notare, che condotta AR normale a $CA = \frac{1}{2}L$, sarà AR l'assintoto della curva CGR.

XI. Essendo $CK = q$, $KG = z$, ne segue, che lo aja CKG si eguaglia a $\int z\,dq = v = ly$. Il numero pertanto, che corrisponde al logaritmo $CKG = v$ nella logistica della suttangente $= 1$, riferita al protonumero $= c$, pareggerà (fig. 2.) la ordinata $Ke = y$ della curva $A'e'7eA$, a cui si conforma la pelle del tamburo, quando si vibra; e quindi descritta la trattoria $C7D$ (fig. 3.) è in nostra potestà il delineare la curva cercata $A'e'7eA$ (fig. 2.), purchè prima si determini l'appropriato valore della costante $g = C7 = CN$.

XII. La trattoria $C7D$ (fig. 3.) ha un secondo

ramo

ramo $CZ'D'$ uguale al CZD, ma collocato negativamente. A questo corrisponde un secondo ramo $CG'R'$ della curva CGR situato anch'esso negativamente, onde alla q negativa si riferiscano le z parimente negative. Il perché a due uguali assisse $CK = q$, $CK' = -q$ competono due uguali ordinate $KG = z$, $K'G' = -z$, ed essendo uguali, ed amendue positive le aje CKG, $CK'G'$, sopra due pari assisse CK, CK' (fig. 2) insistono uguali ordinate Ka, $K'a'$, ed i due rami ZaA', $Za'A'$ sono perfettamente uguali.

XIII. La pelle del timburo può prendere infinite altre figure. Comincio dal considerare quella, che ha tre ventri, cioè (fig. 6.) $A'aZ's'ZsaZA$, siccome più analoga alla figura seconda. Col metodo spiegato si descrive (fig. 7.) il ramo di trattoria CZD, e si intende continuato all'infinito. Mediante un tal ramo si determinerà il corrispondente CGR, in riguardo a cui la assissa $= q$, e la ordinata $= z$. La tangente infinita TD somministrerà $CT = z = \infty = SR$, che si riferirà ad un dato valore di $q = CS$, il quale dipende dalla grandezza della costante g confacente alla fig. 6.

Il ramo $CZ'D'$ (fig. 7.) è uguale al CZD, e soltanto situato contrariamente. Col suo ajuto si delinea il ramo $CG'R'$ uguale al CGR, se non che in esso sono negative la q, e la z. Questi due rami CGR, $CG'R'$ servono a costruire il solo ventre SZS' (fig. 6); laonde per descrivere gli altri due ventri $SaZA$, $S'aZ'A'$, si rendono necessarj altri quattro rami di trattoria $afZD$, $af'3D$; $af'ZD'$, $a'f'3D'$, ed altresì i corrispondenti $aC2R$, $aC3R$;

$aC'2R'$

Schadiasma IX.

$2C'2\ell$, $2C'3\ell'$.

Des ottenere frattanto, immaginiamoci già delineato il ramo di rattoria $2f2D$, che sia toccato dalla retta $2Z\alpha$ nel punto $2Z$. Si tirino $2Z2H$, $2ZL$ parallele, quella a CT, questa a $C2H$. Conciossiachè, come ho dimostrato, $\alpha L = \frac{g z^2 + g - g}{g}$; $L2Z = gz^2 + g$; se accaderà, che il punto $2H$ cada in $2C$, a cui si riferisce (fig. 61) un massimo valore di $y = c = 2C2Z$, il quale richiede $z = 0$; avremo, tagliata $CN = g$, $L2Z = C2H = g = C2C$, αL, o sia $CL = \frac{g^2}{g} = \frac{\overline{C2C}^2}{CN}$. Condotta pertanto parallele a CT la linea $2C2f = 2C'2f' = \frac{\overline{C2C}^2}{CN}$, e segnata la diagonale $2f'C2f$; toccherà essa i quattro rami della rattoria nei punti $2f$, $2f'$. Se si avesse la macchina atta a descrivere la rattoria conveniente al diametro $A'A = L$ del tamburo, alla fig. 61. di ne ventri, ed alla valutrice costante $CN = g$; la macchina stessa determinerebbe le linee $CS = CS'$, $C2C = C2C'$, fra le quali la prima corrispondono a $z = \pm\infty$, la seconda a $z = 0$. Il ramo $2f2D$ ci dà la $C\alpha = -z$, e serve a delineare il ramo rispettivo $2C2G2\ell$, in cui alle g positive $= C2K$ corrispondono le z negative $= 2K2G$. Ci vengono somministrate le z positive dal ramo $2f3D$, e da esse dipende la descrizione del ramo analogo $2C3G3\ell$; nel quale le coordinate $C3K = g$, $3K3G = z$ sono amendue positive. Sopra le g negative insistono, le z positive nel ramo $2C'2G'2\ell'$, che procede dal ramo della rattoria $2f2D'$; e finalmente nel ramo $2C'3G'3\ell'$ generato da quello della

rattoria

trattoria 2'3D' le coordinate sono tutte e due negative.

XIIII. Dovendo essere nel punto 2C, dove (fig. 61.) $y = 2C27 = -c$, $S2Dq = ly = 0$, le due aje (fig. 7.) CSQ, 2CS2Q una positiva, e l'altra negativa hanno necessariamente da uguagliarsi fra loro. Avremo pertanto $CSQ - 2QS2k2G = 2C2k2G = S-2.-Dq$ $= S2Dq = ly$. Quindi il numero corrispondente al logaritmo 2C2k2G nel ramo delle ordinate decrescenti negative della logistica, la cui suttangente $= 2$, ed il protonumero $= c$, si uguaglierà alla ordinata 2k2e (fig. 61) della curva A'27'S'7 S27A, a cui si può accomodare la palla del tamburo, mentre si ruota. Ho detto, che l'ordinata 2k2e esser dee negativa; imperciocchè la curata del punto S' richiede, che i due rami S7S', S27A siano situati uno al contrario dell'altro. Questa osservazione conferma vie più la sentenza, che siano reali i logaritmi dei numeri negativi.

Giacchè nel punto 2C (fig. 7.) $S2Dq = 0$, sarà nel punto 3K $S2Dq = 2C3K3G = ly$; laonde si scoprirà (fig. 61.) $-y = 3K3e$. e poichè l'aja totale (fig. 7.) $2CA3Q = \infty$, ne segue dover essere nel sito A (fig. 61) $-y = 0$.

Saremo guidati da simili riflessioni alla descrizione del ramo S'27'A', ed io la lascio ben volentieri alla industria di chi legge.

XV. La costruzione della figura fornita di un numero impari di ventri maggiore del tre, a cui può adattarsi la palla del tamburo, è affatto simile a quella di tre ventri; dovendo solamente moltiplicarsi i rami della

trattoria

trattoria, il cui numero ha da esser doppio di quello dei ventri, e lo stesso dicasi dei rami dalle coordinate y, z.

XVI. Mi inoltro alla descrizione della figura con due ventri $A'7'S7A$ (fig. 4.), che può competere alla pelle del tamburo. Segno (fig. 5) $A'A = L$, che taglio per mezzo nel punto S, e per i punti A', S, A tiro normali a detta linea le rette infinite $A'rQ'$, QSQ', ArQ, che saranno gli assintoti della curva $rQ'rG'C'$, $C'G'Q'$, QGC, $CrGrQ$ esprimenti la relazione fra y, e z; perchè, come hò notato di sopra, nei punti A', S, A, dove $y = 0$, esser dee $z = \infty$. Rispettivamente ai punti C', C, ai quali (fig. 4.) corrispondono le massime ordinate $C'7' = -c$, $C7 = c$, ho già osservato, che dee aversi $z = 0$, o sia (fig. 5.) $KG = SE = 0$. Perciò in tale incontro la tangente Sf della trattoria $f7D$ dee passare pel punto S. Condotta al punto qualunque 7 della suddetta trattoria la tangente $E7$, e poscia delineata $7L$ parallela ad AA', abbiamo generalmente $7L = g^2 \hat{-} y$, $EL = \frac{g^2 y - y^{\wedge}}{g}$. Ora quando il punto 7 cada sopra il punto f, e la linea $7L$ sopra la fl, anche il punto E coincide col punto S, dovendo essere $SE = -z = 0$. Il perchè scopriremo $fl = y$, $Sl = \frac{y^{\wedge}}{g}$, cioè $fl = SC$, e fatta $SN = g$, $Sl = \frac{SC^{\wedge}}{SN}$. Si tirino pertanto normali ad $A'A$ le rette $Cf = C'f' = \frac{SC^{\wedge}}{SN}$, e descritta la linea fSf', toccherà essa la trattoria fD, frD; $rf'D'$, $rf'rD'$ nei punti f, f'. Immaginiamoci delineata essa trattoria

colla

colla macchina adattata al diametro del tamburo $A'A = L$, alla fig. 4 di due vantri, ed alla rispettiva costante $SN = g$, e la macchina stessa determinerà i punti C, C', a cui due rispetti $z = 0$. Serviranno questi quattro rami per descrivere i corrispondenti CGQ, $CnGnQ$, $C'G'Q'$, $C'nG'nQ'$ della curva, la cui coordinate y, z. La toccante per esempio $7Q$ determina $SQ = -z$. Si faccia l'angolo $SNK = L7Q$, ed alzata normale ad $A'A$ la retta $KG = SQ$, il punto G apparterrà alla curva QGC, e sarà $SK = y$, $KG = -z$.

XVI. Poichè $SK = y$; $KG = -z$, avremo $CKG = \int -z \cdot -dy = \int z\,dy = ly$; laonde (fig. 4.) $KQ = y$ si eguaglia al numero, che nel ramo delle ordinate decrescenti della logistica, la cui suttangente $= L$, ed il protonumero $= c$, corrisponde al logaritmo $= \int z\,dy = CKG$ (fig. 5.). Nel punto S $\int z\,dy = \infty$, e perciò $y = 0$. Al contrario nel punto C $\int z\,dy = 0$; e per conseguenza $y = c$.

Quando $SnK = y$ è maggiore di $S'C$, e minore di $S'A$, ci si presenta l'ordinata positiva $nKnG = z$, ed anche in tale circostanza $\int z\,dy = CnKnG$. Diventando essa sommatoria infinita nel sito A, dove $y = S'A = \frac{1}{2}L$, se ne deduce essere $y = 0$.

Con avvertenze analoghe alle fatte testè giungeremo alla descrizione del ramo $S7'A'$ (fig. 4) uguale a $S7A$, se non che è collocato al contrario.

XVIII. Se la curva, a cui si conforma la pelle del tamburo, avesse 4, 6, 8, &c. ventri, si richiederebbe per descriverla un numero di rami di trattoria, che fosse doppio di quello dei ventri. Io non mi fermerò su tali costruzioni,

potendo

potendo essa agevolmente effettuarsi colla scorta di quella contenuta nella fig. 5; che ho accuratamente spiegata [illegible]

XVIIII. Resta, che si tenti la determinazione della costante g. Se nella formula (9) $\frac{g z^2 q' + q'^2}{g} - p = z$ pongo rispettivamente al punto medio del diametro del tamburo $q = 0$, e che al detto punto medio corrisponda la massima ordinata ($z = y = c$ (fig. 2, 6)) ne risulta $z = c$, $p = 0$, e trovando $0 = 0$, non posso stabilire la grandezza della costante g. Che se nel mentovato punto di mezzo $q = 0$ (fig. 4.), e $\pm z = \infty$, si annulla certamente il termine q^2, e svanendo dall'equazione la costante g, non si lascia determinare. Ne' vale il supporre $q = \pm \frac{1}{2} L$; imperciocché divenendo nei punti A, A' (fig. 2, 4, 6) $z = \pm \infty$ e dileguandosi adequatamente il termine q^2, sparisce anche in tale incontro la nostra costante.

Bisogna dunque procurare di stabilirne il valore meccanicamente. Siccome la figura, a cui si adatta una corda sonora oscillando, non dipende ne' dalla massa, ne' dalla grossezza, ne' dalla tensione, ma soltanto dalla lunghezza, e dalla massima saetta; non altrimenti la figura presa dalla pelle di un tamburo, che si vibra, ha da essere unicamente determinata dal diametro della pelle, e dalla massima saetta. Se sono analoghe le figure di due corde, cioè se si vibrano intere, o divise nello stesso numero di parti, e che di più sia costante la massima saetta, ad ascisse proporzionali alle lunghezze corrispondono ordinate

^ costante più grande, o più piccola

ordinate uguali. Il medesimo dee accadere in due tamburi, le cui pelli si conformino a figure analoghe, e si incurvino a pari saette. Mettiamoci sotto gli occhi la formola spettante al tamburo $-\frac{q\,ddy}{y} = g\,dq^2$ (3), e prese le assisse q, ed i loro elementi dq proporzionali ai diametri L, ne risultano y, dy, ddy eguali in ambo i tamburi. Quindi sarà costante il valore $-\frac{ddy}{y}$, e stando $q\,dq^2$ come L^3, sarà parimente g come L^3.

Noto raccoglierai dall' equazione (3) $g = \frac{aPL^2}{4M}$, che se due pelli ripiegate in figure analoghe, della stessa materia, ed egualmente grosse, verranno tese da una pari somma di forze P, dovrà stare $\frac{aL^2}{M}$ come L^3, e per conseguenza a come L^3, essendo in detta ipotesi M come L^2; ma al num.° XXII. proverò, che esse pelli si vibrano nel tempo $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$, chiamando h la lunghezza di un pendolo a secondi; dunque nelle notate circostanze t come $\sqrt{L^3}$.

Cogli organi idonei relativi ad un valore arbitrario G della costante g si descrivano prima la trattoria, indi col metodo insegnato la curva delle coordinate q, z, e finalmente la curva, in cui si ripiega la pelle del tamburo espresse nelle figure a, 4, 6, &c., ed accaderà, che rimanga determinata la lunghezza della linea $A'A$, che riuscirà sempre più grande, quanto maggiore sarà il numero dei ventri. Facciasi $\overline{A'A}^3 : L^3 :: G : g = \frac{GL^3}{\overline{A'A}^3}$, ed il quarto termine si eguaglierà alla costante appropriata al diametro L del tamburo, il valor della quale si scoprirà gradatamente più piccolo, secondo chè la curva, a cui la pelle può accomodarsi, di un numero più grande di ventri è fornita.

E poiché per la formola (3) $g = \frac{aPL^2}{4M}$, averemo $a = \frac{4G.LM}{\overline{A'A}^3 . P}$. Se le pelli di varj tamburi prendano figure analoghe, cioè a dire composte dallo stesso numero di ventri, la grandezza $\frac{4G}{\overline{A'A}^3}$ sarà costante, e perciò a come $\frac{LM}{P}$; conforme succede altresì nelle corde

corde.

XX. Debbo per altro ~~notare~~ avvertire, che senza determinare i valori della costante g proprj del diametro L; si può effettuare la descrizione delle figure 2, 4, 6; &c. e voglia il resto, scelta una qualunque costante G, ed apprestate le macchine opportune, si pervenga col metodo dichiarato alla costruzione delle figure analoghe alla 2, 4, 6 &c.; nelle quali la massima saetta sia $= c$, e la linea indicante il diametro del tamburo $= \varphi L$: Si tagli un'assissa, a cui corrisponda l'ordinata y; e poscia instituendo l'analogia come φL ad L, così quest'assissa ad AK (fig. 2, 4, 6 &c.), si faccia, che al punto K corrispondente si riferisca la stessa ordinata $y = Ka$, ed il punto a apparterrà alle curve confacenti al diametro $AA' = L$.

XXI. La presente soluzione può servire per dare un saggio dello uso del moto trattorio nei problemi più difficili, quando non si può ottenere la separazione delle variabili. Essendo frattanto meccanica la descrizione della trattoria, non dobbiamo maravigliarci, se col mezzo di essa la costante g si determina soltanto meccanicamente. Egli è di uopo dunque ricorrere a qualche altro metodo, che ci conduca alla analitica determinazione della predetta costante.

Metodo per determinare analiticamente la costante g, ovvero a, ed il tempo di una vibrazione del tamburo.

XXII. Conciossiachè abbia stabilito il nu-

mero

mero (V..) $= \frac{y}{a}$ la forza acceleratrice
dei punti della pelle del tamburo, ricorrendo
alla formola della forza continuamente ap=
plicata, e considerando per esempio (fig. 2, 4, 6 &c)
il moto del punto ζ_A (la cui velocità $= u$) (posta $\zeta C = c$, e lo spa=
zio da scorrersi sino al piano $A'A = y$)
mi si presentava $\frac{y}{a} \cdot -dy = udu$: la
integrazione mi dà $\frac{c^2 - y^2}{a} = u^2$, aggiun=
gendo la necessaria costante, onde sia $u = 0$,
quando $y = c$; ed estratta la radice, $\sqrt{\frac{c^2 - y^2}{a}}$
$= u$: ma chiamato dt il tempicello, in
cui dal punto ζ si passa lo spazio $-dy$,
$u = \frac{-dy}{dt}$; dunque $dt = \sqrt{a} \int \frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$, e
nuovamente integrando, $t = \sqrt{a} \int \frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}}$.
Sia b il quadrante circolare relativo al raggio
c, ed allorchè il punto ζ, e per conseguen=
za anche tutta la pelle ha compiuta una
vibrazione, avremo $\int \frac{-dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \frac{2b}{c}$, e perciò
in tale circostanza $t = \frac{2b}{c} \sqrt{a}$.

Si scoprirà il tempo t espresso esem=
plarmente in secondi, paragonando il tamburo
con un pendolo a cicloide, il tempo di una
vibrazione del quale si espone per la fra=
zione $\frac{2b}{c}$ moltiplicata nella radice della
lunghezza. Nomino h la lunghezza del
pendolo, che fa una vibrazione per secondo,
ed instituita la analogia $t : \frac{2b}{c} \sqrt{a} :: 1 : \frac{2b}{c} \sqrt{h}$,
ritroveremo $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$ tempo misurato in se=
condi di una vibrazione del tamburo, il quale
si renderà noto analiticamente, qualora col
calcolo si stabiliscano gli infiniti valori di a
appropriati

appropriati alla altrettanta diverse figura, che può prendere la pelle del tamburo oscillando.

XXIII. Fingasi, che la pelle del tamburo si adatti, mentre si vibra, ad una curva fornita di un numero infinito di ventri. La distanza fra due punti stabili prossimi sia dq, avvertendo, che dq non lo considero costante ma variabile con quella legge, che possa determinarsi. Posta (Fig. 1.) $CK = \frac{1}{2}L - x = q$, $KH = -dx = dq$, dalle cose dette al principio di questo schediasma num.^ro (V.) raccogliesi, essere la massa della porzione di pelle $LGrGrL = \frac{4M \cdot \frac{1}{2}L - x \cdot -dx}{kL^2} = \frac{4Mqdq}{kL^2}$. Se il raggio c mi dà la circonferenza $2b$, al raggio $\frac{1}{2}L$ corrisponderà la periferia $\frac{2bL}{c}$. Nel luogo citato ho stabilito $ere = \frac{2bL}{kc}$, e giacchè la pelle del nostro tamburo è tesa uniformemente tutto all'intorno dalla somma di forze $= p$, all'arco ere ne tocca la porzione $\frac{p}{k}$.

Essendo $LrL = GrG$ adequatamente, si può considerare la pelle $LGrGrL$ come una corda di costante grossezza LrL, la cui lunghezza $KH = dq$: per la nota legge adunque spettante alle corde grosse invariabilmente il tempo espresso in secondi di una sua vibrazione sarà $t = \frac{c}{2b}\sqrt{\frac{4Mqdq \cdot dq}{kL^2 \cdot h\frac{p}{k}}} = \frac{c}{2b}\sqrt{\frac{4Mqdq^2}{L^2hp}}$ (11), significando h la lunghezza di un pendolo a secondi.

Schediasma IX.

Si stabilisca costante la quantità $q^{\frac{1}{2}}dq$, il che accaderà, quando dq stia sempre in ragione inversa di $q^{\frac{1}{2}}$, e la predetta formola esprimente il tempo di una vibrazione ~~[illegible]~~ della corda di minima lunghezza $KH = dq$ mi insegna, che giusto la assunta ipotesi il doppio settore ene e ene'e' sarà diviso in un numero infinito di cordicelle unisone di lunghezza variabile dq, che si vibreranno in tempo costante t. Osservo essere $Sq^{\frac{1}{2}}dq = \frac{2}{3}q^{\frac{3}{2}}$, e ponendo $q = \frac{1}{2}L$, $Sq^{\frac{1}{2}}dq = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$. In riguardo al doppio settore ene ene'e' avremo la mentovata sommatoria $= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$. Sia $q^{\frac{1}{2}}dq = \frac{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}}{n}$, e comprendendo la quantità $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$ tanti elementi costanti $q^{\frac{1}{2}}dq$, quanti elementi variabili dq si contengono in $A'A = L$, esprimerà n il numero infinito di ventri, nei quali si suppone diviso il diametro $A'A = L$. Nella formola (11) sostituisco in cambio di $q^{\frac{1}{2}}dq$ il suo valore $\frac{\frac{4}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}}{n}$, e mi si presenta $t = \frac{2c}{n.36}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$ (12.)

Questa formola, che si è dedotta dalla supposizione di $n = \infty$, si adatta come vedremo al num.º XXVII, a qualsivoglia grandezza di n, e determina il tempo di una vibrazione del tamburo uguale alla quantità $\frac{2c}{36}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$ divisa per n numero dei ventri.

Essendosi scoperto al num.º XXII. $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$, avremo $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}} = \frac{2c}{n.36}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$, e per conseguenza $a = \frac{4.c^2}{9n^2 6^2}\cdot\frac{LM}{P}$ (13.) e poiché per la formola (3) $\frac{aPL^2}{8M}$

$\frac{a P L^2}{8 M} = g$, ne risulta $g = \frac{c^2}{14 n^2 b^2} \cdot L^3$ (14)

XXIV. Ora egli è di uopo indagare la distanza dal centro del tamburo dei nodi o punti stabili, che separano un ventre dall'altro, quando il numero dei ventri $n = \infty$. Sia primieramente $n = \infty$ numero impari. Si richiami a memoria essere $\int q^{\frac{1}{2}} dq = \frac{2}{3}\sqrt{q^3}$, considerato un solo settore ERE (fig. 1.) Ponendo $q = \frac{1}{2}L$, avremo $\int q^{\frac{1}{2}} dq = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$, e tale è la somma di tutte le minime grandezze costanti $q^{\frac{1}{2}} dq$ in riguardo al mentovato settore. Questa somma divisa per ∞ è relativa al primo semiventre, ed alla distanza del primo nodo dal centro del tamburo; ponendo avremo l'equazione $\frac{2}{3}\sqrt{q^3} = \frac{2}{3\infty}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$, da cui si raccoglie $q = \frac{L}{2\sqrt[3]{\infty^2}}$.

Si renderà noto il valore della distanza del secondo nodo dal centro del tamburo, prendendo 3 parti $\frac{2}{3\infty}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$, e formando l'equazione $\frac{6}{3\infty}\sqrt{\frac{L^3}{8}} = \frac{2}{3}\sqrt{q^3}$:

XXIII. I ventri, che compongono la stessa figura, constano di un pari numero di elementi uguali, la cui lunghezza invariabile è [illegible] dalla supposizione della [illegible] $q^{\frac{1}{2}} dq$ costante. Cerco primieramente la distanza dal centro del tamburo da' nodi o punti stabili, che separano un ventre dall'altro, in quelle figure, che sono formate d'un numero impari di ventri.

Sia il numero dei ventri $n = 3$ [illegible] la lunghezza della linea CS (fig. [illegible]) [illegible] a memoria essere $\int q^{\frac{1}{2}} dq = \frac{2}{3}\sqrt{q^3}$, considerato un solo settore [illegible] (fig. [illegible]) ponendo $q = \frac{1}{2}L$, avremo $\int q^{\frac{1}{2}} dq = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$, e tale è la somma di tutte le minime grandezze costanti $q^{\frac{1}{2}} dq$ in riguardo al mentovato settore [illegible] di questa somma è relativa al [illegible] CS (fig. [illegible]) [illegible] l'equazione $\frac{2}{3}\sqrt{q^3} = \frac{2}{9}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$, da cui si raccoglie [illegible]

[illegible] $\frac{[illegible]}{2\sqrt[3]{9}}$ [illegible] $\frac{[illegible]}{2\sqrt[3]{n^2}}$ [illegible] $n = 3$.

[illegible] $\frac{\sqrt[3]{q}}{2\sqrt[3]{9}}$ [illegible] $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2\sqrt[3]{n^2}}$ [illegible]

[illegible] $\frac{[illegible]}{2\sqrt[3]{n^2}}$ [illegible] $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{2\sqrt[3]{n^2}}$ [illegible]

[illegible] i valori delle distanze [illegible] dal centro del tamburo, quando [illegible] cinque parti la quantità $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$ [illegible]

ora

Schediasma IX.

Aggiunta da porsi al segno # num.ro XXIV. pag. 23.

Per chiaramente dimostrare; che in essa serie l'ultimo termine è rettamente determinato, osservo che i numeri 1, 3, 5, &c. dinotano la quantità impari dei ventri contenuti dentro quella tale distanza dal centro del tamburo. La prima distanza contiene un ventre solo, la seconda tre, la terza cinque, &c. Ciò premesso, quando il numero dei ventri impari è divenuto infinito, e siamo giunti al punto A, tanto il numero superiore, quanto l'inferiore $= \infty$ significa il numero infinito impari dei ventri, nei quali si è ripiegata la pelle del tamburo, e perciò questi numeri infiniti debbono agguagliarsi, onde abbiasi l'ultima distanza $\frac{\sqrt[3]{\infty^2}.d}{2\sqrt[3]{\infty^2}} = \frac{1}{2}d = CA$.

Aggiunta da porsi al segno ¢ numero pag. 24.

Anche in questa serie i numeri 2, 4, 6, &c. significano quanti ventri si comprendano dentro le distanze prima, seconda, terza, &c.; laonde ascendendo all'infinito, il numero superiore pareggerà l'inferiore $= \infty$, e per conseguenza ne risulterà l'ultima distanza dal centro del tamburo $= \frac{\sqrt[3]{\infty^2}}{2\sqrt[3]{\infty^2}} . d = \frac{1}{2}d = CA$.

XXV. La scoperta distanze dei nodi &c.

una parte, per trovare la distanza del primo nodo, e tre parti, per rinvenire quella del secondo. Avremo dunque, in primo luogo, l'equazione $\frac{2}{3}\sqrt{q^3} = \frac{2}{15}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$, che determina $q = \frac{L}{2\sqrt[3]{15}} = \frac{L}{2\sqrt[3]{n^2}}$, essendo in secondo luogo l'equazione $\frac{2}{3}\sqrt{q^3} = \frac{6}{15}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$, si ha $q = \frac{\sqrt[3]{9}\cdot L}{2\sqrt[3]{25}} = \frac{\sqrt[3]{9}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}$.

Donde le q e dunque formano la progressione $\frac{L}{2\sqrt[3]{n^2}}, \frac{\sqrt[3]{9}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}, \frac{\sqrt[3]{25}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}$.

Generalmente le distanze dei nodi dal centro del tamburo, se il numero n dei ventri è impari, si esprimeranno per la seguente serie $\frac{L}{2\sqrt[3]{n^2}}, \frac{\sqrt[3]{9}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}, \frac{\sqrt[3]{25}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}$ ecc. $\frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}} = \frac{1}{2}L$.

Posto che sia pari il numero n dei ventri, e la grandezza $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$ si duplichi, e si divida in tante parti, quante unità si ritrovano in n, e poscia si faccia $\frac{2}{3}\sqrt{q^3}$ uguale ad una, a due, a tre ecc. di queste parti, sintanto che si pervenga al numero n, si determineranno le distanze dei nodi dal centro del tamburo, che saranno dinotate dalla seguente progressione
$\frac{\sqrt[3]{4}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}, \frac{\sqrt[3]{16}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}, \frac{\sqrt[3]{36}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}$ ecc. $\frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}$ ecc.

XXVI. Lo stabilire i punti retti dalla curva, che può prendere la pelle del tamburo, egli è un problema, la soluzione del quale ci guida ad un'equazione differenziale, in cui non è concesso di separare le variabili, e perciò sono stato costretto di ricorrere ad una costruzione meccanica. I punti, frattanto, che corrispondono ad $y = 0$, sono di meno austera natura, e si lasciano ridurre a computo. Non altrimenti il tempo di una vibrazione

che determina $q = \frac{\sqrt[3]{9}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}}$.

La quantità $\frac{2}{3\omega}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$ moltiplicata per cinque ci somministra la lontananza del terzo nodo dal centro del tamburo col mezzo della formola $\frac{2}{3}\sqrt{q^3} = \frac{10}{3\omega}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$, da cui si deduce
$$q = \frac{\sqrt[3]{25}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}}$$

Generalmente le distanze dei nodi dal centro del tamburo, se il numero ω dei ventri è impari, si esprimeranno per la seguente serie
$\frac{\sqrt[3]{1^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}}, \frac{\sqrt[3]{3^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}}, \frac{\sqrt[3]{5^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}}$ ecc. $\frac{\sqrt[3]{\omega^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}} = \frac{1}{2}L$. #

Posto che sia pari il numero ω dei ventri, la grandezza $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{L^3}{8}}$ si duplichi, e si divida in tante parti, quante unità si ritrovano in ω, e poscia si faccia $\frac{2}{3}\sqrt{q^3}$ uguale ad una, a due, a tre ecc. di queste parti, sintanto che si pervenga al numero ω, e si determineranno le distanze dei nodi dal centro del tamburo, che verranno dinotate

dinotata dalla sottoposta progressione
$\frac{\sqrt[3]{m^2}\cdot L}{n\sqrt[3]{co^2}}$, $\frac{\sqrt[3]{co^2}\cdot L}{n\sqrt[3]{co^2}}$, $\frac{\sqrt[3]{co^2}\cdot L}{n\sqrt[3]{co^2}}$
&c. $\frac{\sqrt[3]{co^2}\cdot L}{n\sqrt[3]{co^2}} = \frac{L}{n}$.

XX.V. La scoperta distanza dei nodi dal centro del tamburo, quando $n = co$, servono a stabilire anche quelle, che sono confacenti a qualunque valore finito di n. Sia per esempio $n = 5$. Il terzo nodo, posto co numero impari, dista dal centro del tamburo per la misura $\frac{\sqrt[3]{25}\cdot L}{n\sqrt[3]{co^2}}$. Rimanendo immobile il circolo descritto con un tal raggio, qualora la pelle del tamburo resulta scompartita nel numero di ventri $= co$, posso considerare $\frac{\sqrt[3]{25}\cdot L}{n\sqrt[3]{co^2}}$ come raggio di un tamburo, la cui pelle vibrandosi si adatti ad una curva fornita di cinque ventri. E poichè i tamburi dei raggi $\frac{\sqrt[3]{25}\cdot L}{n\sqrt[3]{co^2}}$, $\frac{L}{n}$ sono figure simili, richiedono i nodi eguali di numero similmente collocati: ma il primo tamburo accomodandosi ad

vibrazione del tamburo, e la costante a possono determinarsi col calcolo; perchè se ne deduce la grandezza dalla curva, a cui si adatta una corda costantemente grossa, la descrizione della quale dipende dalla rettificazione del circolo.

XXVII. Passo a dimostrare, che la formola (12) $t = \frac{2c}{3nb}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$, quantunque dedotta dalla supposizione di $n = co$, si adatta a qualsisia valore di n. Supposto impari il numero $n = co$, abbiamo pel num.^{ro} XXIV. la distanza del primo nodo dal centro del tamburo (fig. 1.) $= CS = \frac{L}{n\sqrt[3]{co^2}}$. La circonferenza delineata col raggio CS resta immobile, quando la pelle si spiega in una curva fornita dal numero co di ventri; dimodochè posso considerare CS come semidiametro di un tamburo. Mi insegna il num.^{ro} XIX. , che le pelli della stessa materia, egualmente grosse, tese dalla medesima somma di pesi uniformemente, e adattate a curve analoghe esemplificate di un solo ventre, si vibrano in tempi, che stanno come le radici dei cubi dei diametri; e per conseguenza ancora come la detta potestà dei semidiametri, cioè a dire come $\overline{CA}^{\frac{3}{2}} : \overline{CS}^{\frac{3}{2}}$: ma la pelle, il cui semidiametro CS, si vibra nel tempo $= \frac{2c}{3cob}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$; dunque
$$\overline{CS}^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{L}{n\,co}\right)^{\frac{3}{2}} : \overline{CA}^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{L}{n}\right)^{\frac{3}{2}} :: \frac{2c}{3cob}\sqrt{\frac{LM}{hP}} : t =$$
$\frac{2c}{3b}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$ tempo di una vibrazione del tamburo, quando la pelle si conforma alla figura fornita di un solo ventre.

Similmente posto $CK = \frac{L}{n\sqrt[3]{n^2}}$, intendendo

intendendo per n qualunque termine della serie 1, 3, 5, 7 &c, avremo

$$CS^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{2}L\right)^{\frac{3}{2}} : CK^{\frac{3}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}L\right)^{\frac{3}{2}}}{n} :: \frac{2c}{3\omega b}\sqrt{\frac{LM}{hP}} : t = \frac{2c}{3nb}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$$

, ed il quarto termine esprimerà il tempo di una vibrazione del tamburo, secondochè la pelle si accomoda ad una curva composta di ventri 1, 3, 5, 7 &c.

Che se $n = \omega$ sia numero pari, il num.ro XXIII. determina $CS = \frac{\sqrt[3]{4}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}}$. Facciasi $CK = \frac{\sqrt[3]{4}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}$, dinotando n qualsivoglia numero della progressione 2, 4, 6, 8 &c., e dalli analogia

$$CS^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{\sqrt[3]{4}\,\frac{1}{2}L}{\sqrt[3]{\omega^2}}\right)^{\frac{3}{2}} : CK^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{\sqrt[3]{4}\,\frac{1}{2}L}{\sqrt[3]{n^2}}\right)^{\frac{3}{2}} :: \frac{2c}{3\omega b}\sqrt{\frac{LM}{hP}} : t = \frac{2c}{3nb}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$$

ne raccoglieremo la formola esprimente i tempi di una vibrazione del tamburo, qualora il numero pari dei ventri si eguaglia ad un termine della serie 2, 4, 6, 8, &c.

Unite insieme le due serie 1, 3, 5, 7 &c. 2, 4, 6, 8 &c. formano quella dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 &c., e perciò qualunque sia il numero n dei ventri, il tamburo oscillerà nel tempo $t = \frac{2c}{3nb}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$.

XXVIII. Paragonata una tal formola con quella appartenente alle corde $t = \frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{LM}{hP}}$, variano solo nei coefficienti, i quali si riguardano come $\frac{2}{3} : \frac{1}{2}$, o sia come 4 : 3.

Lo stesso tamburo, prendendo in serie le figure di ventri 1, 2, 3, 4 &c., si vibrerà in

ad una curva composta da cinque ventri ha i nodi primo, e secondo situati alle distanze dal centro $\frac{L}{2\sqrt[3]{\omega^2}}$, $\frac{\sqrt[3]{9}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}}$; dunque col mezzo delle analogie

$$\frac{\sqrt[3]{25}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}} : \frac{L}{2\sqrt[3]{\omega^2}} :: \frac{L}{2} : \frac{L}{2\sqrt[3]{25}} = \frac{L}{2\sqrt[3]{n^2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{25}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}} : \frac{\sqrt[3]{9}\cdot L}{2\sqrt[3]{\omega^2}} :: \frac{L}{2} : \frac{\sqrt[3]{9}\cdot L}{2\sqrt[3]{25}} = \frac{\sqrt[3]{9}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}$$

si renderanno manifeste le lontananze dei nodi analoghi dal centro del tamburo, il cui raggio $\frac{L}{2}$, posto $n = 5$.

Facilmente si accorgeremo, che passando dal particolare al generale, saranno le distanze dei nodi dal centro del tamburo nella ipotesi di n impari $\frac{L}{2\sqrt[3]{n^2}}$, $\frac{\sqrt[3]{9}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}$, $\frac{\sqrt[3]{25}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}$ &c. $\frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}} = \frac{L}{2}$

Collo stesso metodo scoprirò le mentovate distanze, sendo n numero pari $\frac{\sqrt[3]{4}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}$, $\frac{\sqrt[3]{16}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}$, $\frac{\sqrt[3]{36}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}}$ &c. $\frac{\sqrt[3]{n^2}\cdot L}{2\sqrt[3]{n^2}} = \frac{L}{2}$.

Paragonate le due progressioni con quelle del num.ro precedente, differiscono

Differiscono in ciò solamente, che al numero infinito ∞ deve sostituirsi il finito n, e quindi le stesse serie si adattano a qualunque valore finito, o infinito di n.

in tempi proporzionali alle quantità $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c. non altrimenti che le corde di grossezza costante. Postochè le pelli di due tamburi si adattino a figure analoghe, siano della stessa materia, egualmente grosse, e tese dalla stessa somma di forze $= P$, staranno le masse M come L^2, ed i tempi t come $\sqrt{L^3}$.

Se supposta pari la materia, e la grossezza di due pelli, fosse P come L, di maniera che a porzioni eguali della circonferenza si applicassero uguali forze tendenti, si scoprirebbe t come L, conforme succede nelle corde tese, e grosse ugualmente.

Finalmente due pelli della stessa materia, grosse in proporzione dei diametri, e tese da una somma di pesi in ragione composta della grossezza, e dei diametri, cioè a dire duplicata dei diametri stessi, oscilleranno in tempi proporzionali ai diametri. Conciossiachè queste due pelli siano simili, ed ugualmente elastiche, i tempi delle loro vibrazioni seguitano la legge comune a tutti i corpi formati della stessa materia, simili, e del pari elastici di oscillare in tempi, che ~~oscillano nella~~ si riferiscono ragione dei lati omologhi.

XXVIIII La dimostrata legge delle vibrazioni del tamburo suol confermarsi colla esperienza. Battuto un tamburo, trovai il suo suono relativo alla Fig. 2. unisono al B^b del mio gravicembalo. Applicai poscia un dito al centro del tamburo, onde la pelle dovesse accomodarsi alla Fig. 4, e sentii chiara

li

li ottava acuta, ma alquanto calante, e piut:
tosto unisona ad a, che a b^b. Toccato
col dito il sito S' (fig. 61), obbligai la palla
a prendere la figura di tre ventri. Non
ammorti un tale contatto il suono B^b in:
teramente; di maniera che ci voleva molta
attenzione a discernere il suono proprio della
fig. 61, che nulladimeno si rendea manifesto,
specialmente quando il suono stava per
estinguersi, cessando prima il suono B^b,
a cui il dito recava impedimento, del suono
acuto, il quale si trovò unisono ad a. Se
il suono proprio della fig. 2. si fosse ~~trovato~~ scoperto
unisono ad A, i tre suoni A, a, e corris:
ponderebbero esattamente alla teorica, e
sarebbero proporzionali ai numeri 1, 2, 3
delle vibrazioni fatte in tempi pari, che
stanno inversamente come i tempi 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$
di una di esse vibrazioni di specie diversa
Egli è di uopo pertanto riflettere, che il tam:
buro non era perfettamente circolare, ed in:
clinava alquanto alla figura elittica. Oltre
a ciò la palla non sarà stata fornita in ogni
sito di densità, e di grossezza costante; e
quindi la differenza di un semituono nella
voce grava debbe alle mentovate irregolarità
attribuirsi.

Schediasma X.

Della Vibrazione delle Corde inegualmente grosse.

~~Schediasma Undecimo Matematico~~

e primieramente di quelle, la cui inegualc grossezza

~~Signor Conte Giordano Riccati.~~

è regolata da una legge costante.

I. Se per trovare i tempi, in cui le corde inegualmente grosse fanno una vibrazione, si va ~~fa necessario~~ andare in traccia delle curve, alle quali oscillando si adattano; si incontrano ~~verrebbero~~ infinite equazioni colle variabili talmente miste e confuse, che non riescirebbe di separarle. Il moto trattorio ce ne somministrerebbe, è vero, la costruzione meccanica; ma da questa non si può ~~potrebbe~~ dedurre col calcolo il valore della costante, la cui radice divisa per la radice della lunghezza del pendolo a secondi si eguaglia al tempo di una vibrazione delle corde predette. Per vedere più addentro nella materia, cerchiamo l'equazione delle curve, a cui si accomoda una corda di grossezza variabile, mentre si vibra.

II. Sia AA′ (fig. 1.) una corda di grossezza variabile; si domanda a qual curva A e D e A′ oscillando si adatterà. Si chiamino, come nel precedente Schediasma IX., ~~mentre nelle vibrazioni ...~~, $AA' = L$, $AH = x$, $HK = dx$, $HD = y$, la massima ordinata $CD = c$, e dunque il raggio osculatore $I\phi = Ie = r$, e di più si esprima per M la massa della corda, per P la forza che la tende, e finalmente per f la forza, che sollecita la particola $De = dx$ per la direzione eK. Collo stesso metodo posto in opera nel mentovato Schediasma al num.° (VI.) si scoprirà $f = \frac{P\,dx}{r}$: ma prendendo dx costante, e supponendosi dy minima rispettivamente a dx, $r = \frac{dx^2}{-ddy}$; dunque $f = -\frac{P\,ddy}{dx}$.

Schediasma X.

La grossezza variabile della corda si agguagli alla funzione φx dell'ascissa $AH = x$, ed il volume della particella HK pareggerà la grandezza $\varphi x \cdot dx$. La sommatoria di questa formola, quando $x = AA' = L$, mi renda noto il volume della corda totale, ch'io chiamo $V = \int \varphi x \cdot dx$, ~~[illegible]~~. Facciasi $V : \varphi x \cdot dx :: M : \frac{M \varphi x \cdot dx}{V}$, ed il quarto termine dell'analogia ci darà la misura della massa spettante all'elemento Dd della corda.

Dividendo la forza sollecitante $f = -\frac{P\, ddy}{dx}$ per la detta massa, ne risulta la forza acceleratrice $\frac{Vf}{M\varphi x \cdot dx} = \frac{-VP\, ddy}{M\varphi x \cdot dx^2}$, la quale se tutti i punti della corda AdA' hanno da pervenire nel medesimo istante alla retta AA', dee stabilirsi proporzionale all'ordinata $HD = y$; onde ne provenga l'equazione $\frac{-VP \cdot ddy}{M\varphi x \cdot dx^2} = \frac{y}{a}$; o sia l'equivalente $-\frac{aVP\, ddy}{My} = \varphi x \cdot dx^2$ (1). ~~[illegible]~~, Fatta la grandezza $\frac{aVP}{M} = g$ (2.); la nostra formola si riduce alla seguente $-\frac{g\, ddy}{y} = \varphi x \cdot dx^2$ (3.).

III. Si ridurrà una tal formola alla prima differenza ponendo $\log. y = v$ nel ramo delle ordinate decrescenti della logistica riferita al protonumero c, la cui suttangente $= 1$, onde si abbia $y = c\left(\frac{a}{c}\right)^{-\frac{v}{c}}$. Il calcolo ci insegnerà essere $\frac{ddy}{y} = -ddv + dv^2$, valore, che sostituito nella formola (3) la trasforma così $g \cdot \overline{ddv - dv^2} = \varphi x \cdot dx^2$ (4). Metto

dv

$dv = dz\,dx$, ed ho differenziando $ddv = dz\,dx$ Colloco nella equazione (4) in vece di dv, e di ddv i loro valori, e trovo, fatta la divisione per dx, $-g\,dz - gz^2dx = \varphi x . dx$ (5), formola, in cui si sono dileguate le seconde differenze.

IV. Pongasi $\varphi x = \frac{G^2 x^m}{k^{m}}$, e ne risulterà $-g\,dz - gz^2 dx = \frac{G^2 x^m dx}{k^m}$ (6), nella quale si separano le variabili, quando sia $m=0$, $m=-4$, $m=-\frac{4}{3}$, $m=-\frac{8}{3}$, $m=-\frac{8}{5}$, $m=-\frac{12}{5}$, $m=-\frac{12}{7}$, $m=-\frac{16}{7}$, $m=-\frac{16}{9}$, e generalmente $m=\frac{-4n}{2n\pm1}$, preso per n un qualunque numero intero, e positivo, il quale cominci dal zero, e seguiti per la serie dei numeri naturali.

Si può anche stabilire $\varphi x = \frac{\overline{k\pm x}^m . G^2}{k^m}$, e si otterrà la separazione delle indeterminate, qualora ad m si adattino i mentovati valori. Imperciocchè usata la sostituzione $k\pm x = q$, ci si presenterà $-g\,dz \mp gz^2 dq = \frac{\pm G^2 q^m dq}{k^m}$ che è un'equazione simile alla (6).

Attribuite a φx le dette grandezze, ed essendo $m = \frac{-4n}{2n\pm1}$, si potranno mediante la separazione delle variabili costruire le curve, in cui si ripiegano nell'atto di vibrarsi le nostre corde. Negli altri casi riuscirà opportuno il ricorrere al moto trattorio, dal quale per altro non si raccoglierà, salvochè meccanicamente la grandezza della costante g. I settori componenti la pelle del tamburo si possono considerare come corde, la cui grossezza φx accetti la ragione di $\frac{1}{2}L - x$, onde sia $m = 1$, valore, che non si conta fra quelli sopra determinati necessarj per ottenere lo

sviluppamento

esempio I.

Determinare la curva, alla quale si accomoda, mentre si vibra, la corda fornita della grossezza $\frac{G^2K^4}{\overline{K+x}^4}$.

V. Sia la grossezza &c.

sviluppamento delle variabili. Quindi nel precedente Schediasma IX, mi sono servito del moto vettorio per delineare la curva; a cui si accomoda la pelle del tamburo oscillando, le quali curve per conseguenza vagliono anche per le corde di grossezza variabile proporzionale ad $L-x$.

Diamo ora gli esempj di varj casi, in cui si separano le variabili. V. Sia la grossezza della corda $\varphi x = \frac{G^2K^4}{\overline{K+x}^4}$. Posta $x=0$, avremo $\varphi x = G^2$, e posta $x=L$, avremo $\varphi x = \varphi L = \frac{G^2K^4}{\overline{K+L}^4}$. Poiché ho determinato il volume della corda $V = \int \varphi x \cdot dx$, quando $x=L$, ne risulta

$$\int \varphi x \cdot dx = \int \frac{G^2K^4dx}{\overline{K+x}^4} = \frac{G^2K}{3} - \frac{G^2K^4}{3\cdot\overline{K+x}^3} = \frac{G^2K\cdot\overline{3K^2x+3Kx^2+x^3}}{3\cdot\overline{K+x}^3}$$

vi ho aggiunta la costante necessaria, acciocché il volume della corda si annulli, quando $x=0$. Mettendo $x=L$, scopro $V = \frac{G^2K}{3} - \frac{G^2K^4}{3\cdot\overline{K+L}^3} = \frac{G^2K\cdot(3K^2L+3KL^2+L^3)}{3\cdot\overline{K+L}^3}$, volume intero della corda. Questo valore si sostituisca nella formola (2) $\frac{aVP}{M} = g$, e ne nascerà

$$g = \frac{aPG^2K}{M}\cdot\frac{\overline{3K^2L+3KL^2+L^3}}{3\cdot\overline{K+L}^3} \quad (4.)$$

Nella formola (5) sostituisco $\frac{G^2K^4}{\varepsilon\cdot\overline{K+x}^4}$ in cambio di φx, onde si abbia $-gdz - gz^2dx = \frac{G^2K^4dx}{\varepsilon\cdot\overline{K+x}^4}$. Pongo $K+x=y$, e mi si presenta l'equazione $-gdz - gz^2dy = \frac{G^2K^4dy}{\varepsilon y^4}$.

Giungeremo alla bramata separazione delle variabili, e per conseguenza facendo $-z = -\frac{1}{y} + \frac{p}{y^2}(q)$, $z^2 = \frac{1}{y^2} - \frac{2p}{y^3} + \frac{p^2}{y^4}$, e presa la differenza,

$-dz$

$-dz = \frac{dq}{q^2} + \frac{dp}{q^2} - \frac{2p\,dq}{q^3}$. Adempiuta la sos=
tituzione di questi valori, ne vo dopo la do=
vute operazioni $\frac{G\hat{k}^4\,dq}{\sqrt{g}\,q^2} = \frac{\frac{G\hat{k}^4}{\sqrt{g}}\,dp}{\frac{G^2\hat{k}^4}{g}+p^2}$ (10), e
passando all'integrazione,

$B - \frac{G\hat{k}^4}{\sqrt{g}\,q} =$ Arco Raggio $\frac{Gk^2}{\sqrt{g}}$ Tang. p (11)

VI. Per istabilire la grandezza della costante B, osservo, che qualora nel punto A (fig. 2.) $y=0$, il suo logaritmo v esser dee infinito: ma $v = \int z\,dx = \int z\,dq$; dunque $z = \infty$, sopra di che veggasi il num. X. del citato Scediasma. La formola $k+x = q$ mi insegna, che nel sito A, ove $x=0$, abbiamo $q = k$; dunque nel detto sito la formola (9) $-z = -\frac{1}{q} + \frac{p}{q^2}$ prende il seguente aspetto $-z = -\frac{1}{k} + \frac{p}{k^2}$; e perciò sendo $z=\infty$, si comprende esser tale anche p. Ora la tangente $p = \infty$, quando l'arco di circolo pareggia un quadrante. Chiamato b il quadrante del raggio c, sarà $\frac{bk^2G}{c\sqrt{g}}$ il quadrante del raggio $\frac{Gk^2}{\sqrt{g}}$, e perciò in riguardo al punto A avremo $B - \frac{G\hat{k}^3}{\sqrt{g}} = \frac{bk^2G}{c\sqrt{g}}$, e conseguentemente $B = Gk^2.\overline{\frac{Gk}{\sqrt{g}} + \frac{b}{c\sqrt{g}}}$. Colla sostituzione di questo valore l'equazione (11) si trasforma così

$Gk^2.\overline{\frac{b}{c\sqrt{g}} + \frac{Gk}{\sqrt{g}}} - \frac{Gk^2}{\sqrt{g}\,q} =$ Arco Raggio $\frac{Gk^2}{\sqrt{g}}$ Tang. p (12)

Rimane, che si determini la costante L. Nel punto A' abbiamo $q = k+L$, $y=0$, $p=\infty$. Quindi sarà la tangente p infinita, (lasciato da parte il caso testè notato relativo al punto A, in cui l'arco pareggia un quadrante) qualunque volta l'arco stesso mentovato si agguagli a quadranti 3, 5, 7 &c.

espresso

espresso per n qualsisia termine della serie 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c., il termine generale della progressione 3, 5, 7, 9, &c sarà dinotato dalla quantità $2n+1$.

Scopriremo pertanto

$$Gk^2 \cdot \frac{b}{c\sqrt{g}} + \frac{Gk}{g} \cdot \frac{Gk^2}{g \cdot \overline{k+l}} = \overline{2n+1} \cdot \frac{Gk^2 b}{c\sqrt{g}}$$

, e ridotto che sia il computo, $g = \frac{c^2L^2k^2G^2}{4n^2b^2\overline{k+l}^2}$ (13). Sostituisco questo valore nella formola (12), onde prenda il seguente aspetto

$$\frac{2nb^2 \cdot \overline{k^2+kl}}{c^2L} + \frac{\overline{1+4n^2b^2 k+l}^2 k - 4n^2b^2 \cdot \overline{k+l}^2 \cdot k^2}{c^2L^2 q} =$$

$$\frac{2nb^2 \cdot \overline{k^2+kl}}{c^2L} + \frac{\overline{1+2n \cdot k+l}}{L} - \frac{2nk \cdot k+l}{Lq} =$$

Arco Raggio $\frac{2nb \cdot \overline{k^2+kl}}{cL}$ Tang. ρ, e ponendo il

raggio $\frac{2nb \cdot \overline{k^2+kl}}{cL} = C$ (14)

$$\frac{bC}{c} + \frac{C^2}{k} - \frac{C^2}{q} = \text{Arco Raggio } C \text{ Tang.}^{n} \rho \quad (15)$$

VII. Ora passo a costruire la curva, in cui si spiega la nostra corda. Tiro la indefinita retta $A'B'$ (fig. 18.), ed in essa segno $A'A = L$, $AB = k$, $BL = LB' = C = \frac{2nb \cdot \overline{k^2+kl}}{cL}$. Fatto centro in L, col raggio LB descrivo il circolo $A'OBO'B'$, e poscia per i punti B, A, A' delineo le normali all'infinito prolungate MBM', QAP, $A'P'Q'$. Sia $DRD'P'$ un iperbola Apolloniana, nella quale qualunque rettangolo $BK \cdot KD = C^2$. Se sia l'ascissa $BK = q$, si troverà la corrispondente ordinata $KD = \frac{C^2}{q}$. Segno l'arco $A'OBO'T = \frac{bC}{c} + \frac{C^2}{k}$, ed osservo, che quando k sia positiva, il detto arco è sempre maggiore di tre quadranti, e per

conseguenza.

$= \frac{C^2}{k}$ (tagliato B'O uguale ad un quadrante)

conseguenza l'arco B'GBO'T maggiore di ~~due~~ quadranti. E voglia il vero $\frac{C^2}{k} = \frac{6C}{c} \cdot \frac{cC}{6k}$.

ma per la formola (14) $\frac{cC}{6k} = 2n \cdot \frac{k+L}{L}$;

dunque $\frac{C^2}{k} = \frac{6C}{c} \cdot 2n \cdot \frac{k+L}{L}$, quantità sempre maggiore di $\frac{6C}{c} \cdot 2n$. La figura 4 l'ho adattata al caso di $n=1$, e di $k = \frac{L}{4}$, il quale ci dà $\frac{C^2}{k} = \frac{6C}{c} \cdot 2\frac{1}{2}$.

Preso ~~Tagliato~~ ad arbitrio l'arco $B'GN = \frac{6C}{c} + \frac{C^2}{k} - \frac{C^2}{q}$, a cui si riferisce la tangente $B'H = p$, sarà l'arco $TO'N = \frac{C^2}{q}$. Si determini la linea BM uguale a quest'arco, e posta MD parallela ad BA', in D D' B' incontrerà l'iperbola nel punto D, per cui condotta ~~tirata~~ DK parallela ad MB, avremo per la natura di essa curva $BK = q$. Resa nota in tal guisa la due linee richieste $B'H = p$, $BK = q$; la formola (9) $z = -\frac{1}{q} + \frac{p}{q^2}$ manifesterà il valore di z, a cui fatta uguale l'ordinata KG, il punto G apparterrà alla curva QGCG'Q', le coordinate dalla quale $BK = q$, $KG = z$. Dalla formola (9) raccogliesi, che $z=0$ richiede la condizione $p=q$. Se dunque l'arco TO'N-CR sarà tale, che si abbia $B'B = p = BK = q$, l'ordinata $KG = z$ si annullerà nel punto C. Ciò succederà tante volte, quante unità si contano in n. Nella fig. 4. z svanisce una sola volta, perchè supponemmo $n=1$, e le linee AQ, A'Q' servono di assimtoti ai due rami CGQ, CG'Q'. Per altro

~~[illegible]~~

per sarà

Schediasma X.

sarà generalmente n il numero delle coppie dei predetti rami, ed AR, $A'R'$ gli assintoti dei rami estremi.

Si aja $CGK = \int -2dq = v = \log. y$ nella logistica della sussuguente e riferita al predetto numero III. Si ricorra dunque alla predetta logistica, [illegible] $= 4y$, esprimente [illegible] ed il numero, che nel ramo delle ordinate decrescenti corrisponde al logaritmo $= CGK$, pareggerà l'ordinata $KG = y$ della curva $AGBG'A'$, a cui si accomoda la nostra corda, mentre si vibra. Al punto C conviene l'ordinata massima $CB = c$; perchè quivi $CKG = \log. y = \log. c = 0$. Nei punti A, A' CKG, ovvero $CK'G' = \infty$, e per conseguenza $y = 0$. Supponendosi nella fig. 8. $n = 1$, la curva è formata di un ventre solo. Sarà pertanto il numero dei ventri [illegible] collocati a vicenda, uno dalla parte delle ordinate per esempio positive, ed il secondo da quella delle ordinate negative.

$CB = c$

VIII. Giudico conveniente di indagare i valori delle assissa $BK = q$, quando $KG = y = 0$. Ho stabilito al numero VI, che y si annulla, qualora l'arco $B'ON$ si eguaglia a quadranti 3, 5, 7, 9, 11, &c. Se $n = 1$, è soltanto $y = 0$ nel punto estremo A' della corda, quando il predetto arco pareggia 3 quadranti. Se $n = 2$, corrisponde $y = 0$ ai numeri di quadranti 3, 5, e la curva ha due ventri. Si riferisca $y = 0$ ai numeri di quadranti 3, 5, 7, posto $n = 3$, e la curva ha tre ventri. Generalmente la curva è formata dal numero n di ventri, ed ogni volta che il mentovato arco si eguaglia a quadranti 3, 5, 7, 9 &c. intieri, abbiamo $y = 0$.

Quindi scopriremo il punto di quiete, o nodo

o nodo più vicino al punto A, ponendo nella formola (15.) Arco Rag. C Tang. $p = \frac{3bC}{c}$, onde si abbia $\frac{bC}{c} + \frac{C^2}{k} - \frac{C^2}{g} = \frac{3bC}{c}$, e fatti i dovuti calcoli, $g = k + \frac{2bk^2}{cC - 2bk} = k + \frac{kL}{n\cdot\overline{k+L} - L}$, sostituendo in vece di C il suo valore somministrato dalla formola (14) $C = \frac{2nb\cdot\overline{k^2+kL}}{cL}$.

La equazione $\frac{bC}{c} + \frac{C^2}{k} - \frac{C^2}{g} = \frac{5bC}{c}$ serve a scoprire la distanza del secondo nodo dal punto B; dandoci $g = k + \frac{4bk^2}{cC - 4bk} =$

$k + \frac{2kL}{n\cdot\overline{k+L} - 2L}$.

Il terzo nodo si allontanerà dal punto B per la misura $g = k + \frac{6bk^2}{cC - 6bk} =$

$k + \frac{3kL}{n\cdot\overline{k+L} - 3L}$.

Dal proseguimento della serie viene determinata ~~Cinquemente~~ la distanza dell'ultimo nodo n dal punto B, cioè $BA' = k + \frac{nkL}{n\cdot\overline{k+L} - nL}$

$= k + L$.

Giacchè $BA = k$, le lontananze dei nodi dal punto A ci sono manifestate dalla seguente ~~serie~~ progressione

$\frac{kL}{n\cdot\overline{k+L} - L}$, $\frac{2kL}{n\cdot\overline{k+L} - 2L}$, $\frac{3kL}{n\cdot\overline{k+L} - 3L}$ &c. $\frac{nkL}{n\cdot\overline{k+L} - nL} = L$.

IX. Dalle due* formole (4) $g = \frac{aPkL^2}{M}\cdot\frac{3k^2L + 3kL^2 + L^3}{3L^3\cdot\overline{k+L}^3}$, (13) $g = \frac{c^2L^2k^2G^2}{4n^2b^2\cdot\overline{k+L}^2}$

si deduca il valore della costante

$a = \frac{c^2}{4n^2b^2}\cdot\frac{LM}{P}\cdot\frac{3k^2 + 3kL}{3k^2 + 3kL + L^2}$ (16). Posta

$k = \infty$, la grossezza della corda $\frac{G^2k^4}{\overline{k+x}^4}$

diviene

* Trovare il tempo di una vibrazione della corda, la cui grossezza $\frac{G^2k^4}{\overline{k+x}^4}$.

diviene costante ad $= \frac{G^2}{\pi}$. In tal circostanza parrebbe $a = \frac{c^2}{4\pi^2 b^2} \cdot \frac{LM}{P}$, conforme realmente richiedono le corde ugualmente grosse.

Al numero XXII della precedente Schediasma IX. ho dimostrato, che sendo come nel nostro caso $\frac{y}{a}$ la forza accelleratrice, segue una vibrazione nel tempo $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$ misurato in secondi, esprimendo h la lunghezza del pendolo, che fa una vibrazione per secondo. Per la qual cosa in riguardo alla nostra corda $t = \frac{c}{2\pi b}\sqrt{\frac{LM}{Ph} \cdot \frac{3k^2+3kL}{3k^2+3kL+L^2}}$ (12).

Fra i molti corollarj, che potrei dedurre, mi ristringerò a due. La stessa corda, la cui grossezza $\frac{G^2 k^4}{4 \cdot \overline{k+x}^4}$, secondochè si conforma a figure di ventri 1, 2, 3, 4, &c., oscillerà in tempi, che staranno come $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, &c.: proprietà, che alle corde ugualmente grosse altresì conviene.

Le corde simili deggiono avere le grossezze omologhe come L^2; e poichè pel num. V. la massima grossezza si eguaglierà a G^2, sarà G proporzionale ad L, e dunque attribuito ad n lo stesso valore; t come $\sqrt{\frac{LM}{P}}$. (Avvertasi: n e lo stesso parimente dee avvertirsi di K, onde il volume $V = G^2 K \cdot \frac{3k^2L+3kL^2+L^3}{3 \cdot \overline{k+L}^3}$ accetti la proporzione di L^3, come richiedono i corpi simili.) Che se in oltre siano formate dalla medesima materia, dimodochè la massa M stia come L^3, e di più la forza tendente P riceva la ragione delle grossezze analoghe, e stia come G^2, o come L^2, scopriremo il tempo t come L, la qual legge è comune a tutti i corpi simili, della stessa materia, ed ugualmente elastici.

X. Se

X. Se alla grossezza della corda si appropriasse l'espressione $\frac{G^2K^4}{\overline{K-x}^4}$, ~~ovvero l'equivalente~~ ~~$\frac{G^2K^4}{\overline{K+x}^4}$~~, la corda farebbe una vibrazione nel tempo $t = \frac{c}{an6}\sqrt{\frac{LM}{\rho h}\cdot\frac{3K^2-3KL}{3K^2-3KL+L^2}}$ (18). ~~...~~ ~~...~~ egli è di uopo che sia $K > L$. In si fatta ipotesi la minima grossezza G^2 corrisponde ad $x = 0$, e la massima $\frac{G^2K^4}{\overline{K-L}^4}$ ad $x = L$, e queste grossezze stanno amendue dentro i limiti del finito.

Ponendo $K < L$, * ~~il tempo immagi~~ ~~nario che ne risulta, ...~~ ~~...~~ ~~la nostra corda ...~~ ~~...~~ ~~la proporzione della curvatura~~ * ad $x = 0$ si riferisce la grossezza finita G^2, ad $x = L$ la grossezza finita $\frac{G^2K^4}{\overline{K-L}^4}$: ma facendo $x = K$, la grossezza $\frac{G^2K^4}{\overline{K-x}^4} = \frac{G^2K^4}{0}$ ascende all'infinito sproporzionata # ~~...~~

In di vegetarsi ~~...~~ per altro assegnare a K una tale misura, che la massima grossezza $\frac{G^2K^4}{\overline{K-L}^4}$ non si opponga alla flessibilità della corda.

Determinare la curva, in cui si ripiega nelle oscillare la corda fornita della grossezza $\frac{G^2K^2}{\overline{K+x}^2}$

Esempio II.

XI. Venga proposto di trovare la curva, ~~il tempo~~, in cui si ripiega ~~...~~ una corda fornita della grossezza $\frac{G^2K^2}{\overline{K+x}^2}$. La formola $\int\frac{G^2K^2dx}{\overline{K+x}^2}$ ci dà il volume della corda relativo all'ascissa x uguale a $G^2K - \frac{G^2K^2}{K+x} = \frac{G^2Kx}{K+x}$. Ho aggiunta la costante opportuna, onde il detto volume si annulli posta $x = 0$. Fatta $x = L$, trovo $V = \frac{G^2KL}{K+L}$ (19.) volume intero della nostra corda. Questo valore si sostituisca nella formola (2) $\frac{aV\rho}{M} = g$, e ne risulterà

$g = \frac{a.\rho G^2KL}{M.\overline{K+L}}$ (20).

Nella formola (5) sostituisco $\frac{G^2K^2}{\overline{K+x}^2}$ in cambio di φx, ed ho $-gdz - gz^2dx = \frac{G^2K^2dx}{\overline{K+x}^2}$.

* il numeratore $3K^2-3KL$ della frazione $\frac{3K^2-3KL}{3K^2-3KL+L^2}$ è negativo, ed il denominatore $3K^2-3KL+L^2 = 3.K^2-KL+\frac{L^2}{4}+\frac{L^2}{3}-\frac{L^2}{4}$ positivo; imperocchè $K^2-KL+\frac{L^2}{4}$ è positivo, e tale altresì la grandezza $\frac{L^2}{3}-\frac{L^2}{4}$. La mentovata frazione adunque è negativa, ed il tempo immaginario &c.

Dunque

Schediasma X.

Pongo $k+x=q$, e mi si affaccia l'equazione $-g\,dz - gz^2\,dq = \frac{G^2k^2\,dq}{q^2}$. Otterremo la separazione delle variabili, mettendo $z = -\frac{G^2k}{pq}$.+ Presa la differenza, avremo $dz = G^2k \cdot \frac{p\,dq + q\,dp}{p^2q^2}$, ed effettuata la sostituzione di tali valori, troveremo dopo le convenienti operazioni

$$\frac{dp}{p^2 + \frac{gp}{k} + gG^2} = -\frac{k}{g} \cdot \frac{dq}{q}, \text{ ovvero sia}$$

$$\frac{\overline{gG^2 - \frac{g^2}{4k^2}} \cdot dp}{-\overline{p - \frac{g}{2k}}^2 + gG^2 - \frac{g^2}{4k^2}} = \frac{k}{g} \cdot \overline{gG^2 - \frac{g^2}{4k^2}} \cdot -\frac{dq}{q} \cdot \Phi$$

Faccio $gG^2 - \frac{g^2}{4k^2} = C^2$, ed ho

$$\frac{C^2\,dp}{-\overline{p - \frac{g}{2k}}^2 + C^2} = \frac{kC}{g} \cdot -\frac{dq}{q}\ (21),$$ ed integrando,

$$\text{Arco rag. } C \text{ Tang.} -p - \frac{g}{2k} - B = \frac{kC^2}{g} \log. \frac{k}{q}\ (22)$$

nella logistica della suttangente $1\frac{kC^2}{g}$ riferita al protonumero k.

XII. Per determinare la grandezza della costante B, ho già notato nello Schediasma IX al num.^{ro} IX., che nel punto A (fig. 2.) esser deve $z=\infty$. Dalla formola $k+x=q$ si vede, che nel sito A, dove $x=0$, abbiamo eguale, che nel sito A, e quindi nel detto sito la formola $q=k$, e quindi nel detto sito la formola $-z = \frac{G^2k}{pq}$ diviene $-\infty = \frac{G^2}{p}$, e mi addita dover essere $p=0$. Scopriremo pertanto

$$\text{Arco rag. } C \text{ Tang.} -\frac{g}{2k} - B = \frac{kC^2}{g} \log. k = 0,$$

e conseguentemente $B = \text{Arco rag. } C \text{ Tang.} -\frac{g}{2k}$. Sostituito questo valore l'equazione (22) si trasforma così

Arco

+ Questa formola ci mostra a dito, che a z positiva corrispondavi p negativa, o al contrario. Vedi Sc.

Φ Nello estrarre la radice dal quadrato $p^2 + \frac{gp}{k} + \frac{g^2}{4k^2}$ ho posto in uso del segno negativo, acciocchè a z positiva si risponda p negativa; onde veggasi la correzione al num.^{ro} XIV.

Arco Rag. C Tang. $\overline{-p+\frac{g}{2k}}$ − Arco Rag. C Tang. $\frac{-g}{2k}$

$= \frac{kC^2}{g} \cdot \log. \frac{k^2}{g}$ ~~(cancellato)~~ $= \frac{kC^2}{g} \cdot -\log. g$ (23)

Mi rivolvo a stabilire la costante g. Nel punto A' abbiamo $g = k+l$, $z = \infty$, e giacchè $z = -\frac{G^2k}{pg}$, ne risulta $\infty = \frac{-G^2k}{p \cdot \overline{k+l}}$, il che richiede $p = 0$. Gli Archi Rag. C Tang. $\overline{-p+\frac{g}{2k}}$ nei due siti A, A', nei quali $p = 0$, hanno la stessa tangente, e perciò possono differire pel numero di semicircoli espresso dalla seguente serie 1, 2, 3, 4, &c., o sia pel numero n di semicircoli, dinotando n qualunque termine della serie predetta. Se b significhi il quadrante del raggio c, sarà $\frac{2bC}{c}$ il semicircolo del raggio C, ed i mentovati archi potranno differire per $\frac{2nbC}{c}$. Al perchè Avremo pertanto nel punto A' Arco Rag. C Tang. $\overline{-p+\frac{g}{2k}}$ = Arco Rag. C Tang. $\frac{-g}{2k} + \frac{2nbC}{c}$ +, e quindi

+ (Intendendo per Arco Rag. C Tang $\frac{-g}{2k}$ quello che compete al punto A)

Arco Rag. C Tang. $\overline{-p+\frac{g}{2k}}$ − Arco Rag. C Tang. $\frac{-g}{2k}$

$= \frac{2nbC}{c} = \frac{kC^2}{g} \cdot \log. \frac{k^2}{k+l}$. Dividendo per C, moltiplicando per g, ed alzando al quadrato, trovo

$\frac{4n^2b^2g^2}{c^2k^2} = C^2 \cdot \overline{\log \frac{k^2}{k+l}}^2$, e sostituendo in vece di C^2 il suo valore, $\frac{4n^2b^2g^2}{c^2k^2} = \overline{gG^2 - \frac{g^2}{4k^2}}\ \overline{\log. \frac{k^2}{k+l}}^2$, ~~[cancellato]~~ equazione, da cui si raccoglie

$$g = \frac{G^2k^2\ \overline{\log. \frac{k^2}{k+l}}^2}{\frac{4n^2b^2}{c^2} + \frac{1}{4}\ \overline{\log. \frac{k^2}{k+l}}^2} \quad (24).$$ ~~[cancellato]~~,

$= \overline{\log \frac{k^2}{k+l}}^2$ (11 a capo)

~~sarebbe [cancellato]~~ Posto $k = \infty$, onde la grossezza della corda $\frac{G^2k^2}{\overline{k+x}^2} = G^2$ diventa costante.

costante, e $\log.\frac{k^2}{k+L}$ si eguagli ad $\frac{L}{k}$, si scoprirebbe $g=\frac{c^2L^2G^2}{4n^2b^2}$, conforme esigono le corde costantemente grosse.

* Sia (fig. 9) $BA=k$, $AA'=L$, e col mezzo &c.

XIII. * Col mezzo della formola
$$\frac{2mbC}{c}=\frac{kC^2}{g}.\log.\frac{k^2}{g}$$
si stabiliscono le distanze dei nodi, o punti in quiete dal punto B_1 [illegible], le quali convengono ai varj valori di n; Quando $m=0$, essendo $\log.\frac{k^2}{g}=0=\log k$, $=BA$
e per conseguenza $g=k_1$; il che determina il punto A. Si metta poscia m uguale ad $1, 2, 3,$ &c. n, e si scopriranno le distanze dal punto B dei nodi $1, 2, 3,$ &c. n, e questa ultima lontananza sarà $=AA'=k+L$.

\+ ~~aggiunge~~ [illegible] in detta figura ~~[illegible]~~.

Dividendo per C, ne risulta $\frac{2mb}{c}=\frac{kC}{g}\log.\frac{k^2}{g}$:
ma $C=\sqrt{gG^2-\frac{g^2}{4k^2}}$; dunque
$$\frac{2mb}{c}=k\sqrt{\frac{G^2}{g}-\frac{1}{4k^2}}\cdot\log\frac{k^2}{g},$$
e sostituito in cambio di g il suo valore,
$$\frac{2mb}{c}=\sqrt{\frac{\frac{4n^2b^2}{c^2}+\frac{1}{4}\log.\frac{k^2}{k+L}^2}{\log.\frac{k^2}{k+L}^2}-\frac{1}{4}}\;\log.\frac{k^2}{g}$$
$$=\frac{2nb}{c\log.\frac{k^2}{k+L}}\cdot\log.\frac{k^2}{g},$$
e per conseguenza
$$\frac{m}{n}\log.\frac{k^2}{k+L}=\log.\frac{k^2}{g}.$$
E poiché $\log.\frac{k^2}{k+L}=-\log\overline{k+L}$, $\log.\frac{k^2}{g}=-\log.g$, avremo
$$\frac{m}{n}\log.\overline{k+L}=\log.g.$$

Questa formola mi insegna doversi dividere $\log.\overline{k+L}$ in tante parti, quante unità si contengono in n, e prenderne

poi

Schediasma X.

(Aggiunta del num.° XIV.) alla pag. 43.

XIV. Ora mi accingo a ~~Non tralascierò~~ dare la costruzione della curva, a cui si accomoda oscillando la nostra corda. Nella retta A'A' (fig. 9) taglio $BS = \sqrt{K^2+KL}$ $A'A = L$, $AB = K$, $BL = LB' = C = \sqrt{4G^2 - \frac{g^2}{4K^2}}$.

Col raggio LB delineo il circolo BOB'O'B, e poscia per i punti B, A, S, A' conduco le normali all'infinito prolungate MBM', QAQ', QSQ', A'QQ'. Sia ADRA la logaritmica della sottotangente $\frac{KC^2}{g} = KG^2 - \frac{g}{4K}$

$= \frac{16 n^2 b^2 K G^2}{16 n^2 b^2 + c^2 \log \frac{K^2}{KL}}$, $BA = K$ il protonumero,

$BK = g$ i numeri, e KD i logaritmi. Se $-\log g$ esprima il logaritmo nella logistica della sottotangente $= 1$, avremo $KD = \frac{KC^2}{g} \cdot -\log g$.

Segue $BH = \frac{-g}{2K}$ =, e tiro la secante LNH, che determina l'arco corrispondente BN. Faccio poscia l'arco $NI = KD$, e condotta la secante LIT, mi s'insegna la formola (23) Arco Rag. C Tang. $\frac{-g}{2K} - p$

$-$ Arco Rag. C Tang. $\frac{-g}{2K} = \frac{KC^2}{g} - \log g$, essere $HT = -p$.

Rese note con tal mezzo le linee corrispondenti $BK = g$, $HT = -p$, dalla equazione $z = \frac{-G^2 K}{pg}$ raccolgo il valore relativo di z, a cui si eguagli la linea $KG = z$. Mi è dunque concesso di descrivere la curva QGCG'Q', ~~le cui coordinate BK=g~~ le cui coordinate ~~KG=z~~ 2Q2G2C2G'2Q', $BK = g$, $KG = z$. Se come suppongo $n = 2$, la nostra curva è composta dei quattro rami, cioè dei rami 2n, QGC, CG'Q', 2Q2G2C, 2C2G'2Q', ai quali servono di asintoti le linee AQ, SQ', S2Q, A'2Q'. I punti C, 2C ove $z=0$ si stabiliscono riflettendo, che giusto l'equazione

Nota: scelgo quella, ch'è di due vertici levata

Schediasma X.

l'equazione $z = -\frac{G^2K}{pq}$ e $\pm z = 0$ dee riferirsi $\mp p = \infty$. Nella supposizione di $n = 2$ ciò succede quando l'arco

Arco rag. c Tang. $\frac{\mp e}{nk} \mp p$ – Arco rag. c Tang. $\frac{-e}{nk}$

$= \begin{cases} NO' = \frac{6C}{c} - \text{Arco rag. c Tang.} \frac{-e}{nk} \\ NO'B'O = \frac{36C}{c} - \text{Arco rag. c Tang.} \frac{-e}{nk} \end{cases}$

Fatte dunque $AX = NO'$, $A2X = NO'B'O'$ e condotte le linee XR, $2X2R$ parallele ad AA', che seghino la logistica ADD nei punti R, $2R$, e tirate RC, $2R2C$ normali ad AA', nei punti C, $2C$ sarà $z = 0$.

Poichè l'aja $CGK = \int -2dq = v$ $= \log. y$ nella logistica della suttangente 1 [illegible] e [illegible] è come [illegible], il numero, che nel ramo delle ordinate [illegible] crescenti corrisponde al logaritmo CKG si agguaglierà alle ordinate $KG = y$ della curva $AG\,2\,S\,2\,2A'$, in cui si spiega la nostra corda qualora $n = 2$. Ai punti C, $2C$ compete l'ordinata massima $C2 = c$, $2C2 2 = -c$, perchè in [illegible] l'aja $CKG = \int -2dq = v = \log y = \log. c = 0$. Nei punti A, S, A'. $\int -2dq = \infty$ positivo, o negativo, e però $y = 0$.

XV. Dal paragone &c.

poi 1, 2, 3; 4, &c. n di queste parti per avere il $\log.^{mo}\, g$. Ho già detto, che se $m = 0$, abbiamo $g = k$; se $m = n$, abbiamo $g = k+l$. Gli altri valori di g ce li somministrerà il numero $n-1$ di medie proporzionali fra k, e $k+l$. Ecco dunque i valori di g, ai quali corrispondono i nodi

$$k = k^{\frac{n}{n}} \cdot \overline{k+l}^{\,0},\quad k^{\frac{n-1}{n}} \cdot \overline{k+l}^{\,\frac{1}{n}},\quad k^{\frac{n-2}{n}} \cdot \overline{k+l}^{\,\frac{2}{n}},\ \&c.$$

$$k^{\frac{n-n}{n}} \cdot \overline{k+l}^{\,\frac{n}{n}} = k+l.$$

Si avranno le distanze dei nodi dal punto A, sottraendo dai sovrapposti valori di g la quantità k.

* Qui ci va il num.^ro XIV.

* XV. Dal paragone delle due formole

$$(20)\ g = \frac{aPG^2kl}{M\cdot\overline{k+l}},\quad (24)\ g = \frac{G^2k^2\cdot\log.\overline{\frac{k^2}{k+l}}^{\,2}}{\frac{4n^2b^2}{c^2}+\frac{1}{4}\log.\overline{\frac{k^2}{k+l}}^{\,2}}$$

Trovare il tempo, nel quale si vibra la corda, la cui grossezza $\frac{G^2k^2}{\overline{k+x}^{\,2}}$.

si deduce

$$a = \frac{M\cdot\overline{k^2+kl}\cdot\log.\overline{\frac{k^2}{k+l}}^{\,2}}{Pl\cdot\frac{4n^2b^2}{c^2}+\frac{1}{4}\log.\overline{\frac{k^2}{k+l}}^{\,2}}\ (25).$$

e conciossiachè pel num.^ro XXII. dello Schediasma IX. $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$, si scopre vibrarsi la nostra corda nel tempo

$$t = \sqrt{\frac{M\cdot\overline{k^2+kl}\cdot\log.\overline{\frac{k^2}{k+l}}^{\,2}}{hPl\cdot\frac{4n^2b^2}{c^2}+\frac{1}{4}\log.\overline{\frac{k^2}{k+l}}^{\,2}}},$$

ovvero ponendo $\log.\overline{k+l}^{\,2}$ in vece di $\log.\overline{\frac{k^2}{k+l}}^{\,2}$

$$t = \sqrt{\frac{M\cdot\overline{k^2+kl}\cdot\log.\overline{k+l}^{\,2}}{hPl\cdot\frac{4n^2b^2}{c^2}+\frac{1}{4}\log.\overline{k+l}^{\,2}}}\quad (26)$$

Quando $n = \infty$, ne risulta

$$t = \frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{M\cdot\overline{k^2+kl}\cdot\log.\overline{k+l}^{\,2}}{hPl}}.$$

Che se fosse $k = \infty$, la corda sarebbe fornita dalla grossezza costante $\frac{G^2k^2}{\overline{k+x}^{\,2}} = G^2$,

e

e $\overline{\log.\ k+l}^2$ si agguaglierebbe ad $\frac{L^2}{k^2}$.

Sostituito questo valore, e cancellati i termini rispettivamente nulli, la formola (28) prende il seguente aspetto adattato alle corde egualmente grosse $t = \frac{c}{2nb}\sqrt{\frac{ML}{KP}}$.

Una conseguenza importante dobbiamo raccogliere dalla formola (28), cioè che alla corda, la cui grossezza $\frac{G^2k^2}{g^2}$, non compete la proprietà, secondochè i suoni sentiti sono 1, 2, 3, 4, &c., che i tempi di una vibrazione serbino la proporzione delle frazioni 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. Si assegnino per esempio a k, e ad L tali misure, onde ne provenga $\frac{4b^2}{c^2} = \frac{1}{4}\overline{\log.\ k+l}^2$, o sia $\frac{4b}{c} = \log.\ k+l$, ed attribuiti ordinatamente ad n i valori 1, 2, 3, 4, &c., troveremo t proporzionale ai termini della sottoposta serie

$\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\frac{1}{\sqrt{26}}$ &c.

che generalmente si esprimono per $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$.

Poche sono le corde inegualmente grosse, che godano della mentovata prerogativa; e a buon conto non dobbiamo maravigliarci se una corda di grossezza variabile rende un suono poco grato, nascente da una sensibile mescolanza di suoni, che in proporzioni rozze composte si corrispondono; ~~il che specialmente~~ ^

^ nelle corde di minugia accade frequentemente, se diminuiscono i loro grossezza disuguali, l'orecchio non può giudicare accuratamente.

Se la nostra corda si adatterà ad una delle figure da me determinate, renderà un suono solo, e nel tempo t passerà da uno stato all'altro di quiete. Ma incitando al moto essa corda, sarebbe una combinazione assai rara, che mediante una pronta comunicazione laterale di moto la corda si accomodasse ad una

della

dalle predette figure. Accadeva quasi sempre, che la corda si piegasse in una curva originata dalla composizione di moltissime curve semplici; e che producesse un suono misto di suoni consonanti alle curve componenti. E poichè i tempi delle vibrazioni di questi suoni si corrispondono in ragioni sorde, la corda non si ridurrà mai ad uno stato assoluto di quiete, se non quando dalla resistenza verrà estinto il suo moto. Nelle corde cilindriche, ed in quelle dell'esempio I. ad ogni vibrazione della corda intera, ritorna questa allo stato di quiete; ed essendo i suoni acuti sono perfettamente uniti col suono grave; e si può dire che in certa guisa formino un suono solo. Non così nelle corde dell'esempio II. sono in esse gli stati di quiete relativi ai suoni diversi, ma non esiste mai uno stato assoluto di quiete; laonde si dà un confusione composta fra suoni, che si riferiscono in proporzione assiccata, e qualora i suoni acuti non siano assai fiacchi, ne risulta un suono falso, che ad orecchio non può riuscire aggradevole. #

XVI: Espressa la grossezza della corda per $\frac{G^2K^2}{\overline{K-x}^2}$, si vibrerebbe essa corda nel tempo $t = \sqrt{\frac{M.K^2 - KL \log \overline{L+K}}{hPL \cdot \frac{4n^2b^2}{c^2} + \frac{1}{4}\log \overline{L+K}}}$

(n) Per isfuggire gli inconvenienti, egli è necessario, che sia $K > L$. Si applichi al caso presente quello che ho scritto al num° X., e singolarmente si noti, che posta $K < L$, ad $x = K$ corrisponderebbe la grossezza della corda $\frac{G^2K^2}{\overline{K-x}^2} = \frac{G^2K^2}{0} = \infty$, che non appartiene alla fisica. #

Determinare le curve, alle quali si conforma una corda, la cui grossezza $\frac{G^2K^{\frac{4}{3}}}{\overline{K+x}^{\frac{4}{3}}}$.

Esempio III.

XVII. Cerco le curve, alle quali si adatta una corda, la cui grossezza $\frac{G^2K^{\frac{4}{3}}}{\overline{K+x}^{\frac{4}{3}}}$

La $\int \frac{G^2K^{\frac{4}{3}}dx}{\overline{K+x}^{\frac{4}{3}}} = 3G^2K - \frac{3G^2K^{\frac{4}{3}}}{\overline{K+x}^{\frac{1}{3}}}$, che nullasi posta $x = 0$, si agguaglia al volume della nostra corda corrispondente alla ascissa x. Qualora $x = L$, avremo $V = 3G^2K \cdot \frac{\overline{K+L}^{\frac{1}{3}} - K^{\frac{1}{3}}}{\overline{K+L}^{\frac{1}{3}}}$, volume intero della corda. Sostituisco un tal valore nella formola (n) $\frac{aVP}{M} = g$, ed ho $\frac{3aPG^2K}{M} \cdot \frac{\overline{K+L}^{\frac{1}{3}} - K^{\frac{1}{3}}}{\overline{K+L}^{\frac{1}{3}}} = g$. (n8.)

Schediasma X.

Pongo nella formola (5) $\frac{G^2 k^{\frac{4}{3}}}{\overline{k+x}^{\frac{4}{3}}}$ in luogo di φx, ed ho $-g dz - g z^2 dx = \frac{G^2 k^{\frac{4}{3}} dx}{\overline{k+x}^{\frac{4}{3}}}$, e fatta $k+x = q$, $dx = dq$, ne risulta $-g dz - g z^2 dq = \frac{G^2 k^{\frac{4}{3}} dq}{q^{\frac{4}{3}}}$.

La sostituzione $-z = \frac{1}{v}$, onde si abbia $-dz = -\frac{dv}{v^2}$, trasforma in tal guisa la formola $-\frac{g dv}{v^2} - \frac{g dq}{v^2} = \frac{G^2 k^{\frac{4}{3}} dq}{q^{\frac{4}{3}}}$.

$-\frac{1}{2} =$

Si faccia, $v = -\frac{g q^{\frac{1}{3}}}{3 G^2 k^{\frac{4}{3}}} + q^{\frac{2}{3}} p$ (ng), e dopo le necessarie operazioni si giungeva alla formola $\frac{G^2 k^{\frac{4}{3}} p^2 dq}{g \cdot q^{\frac{2}{3}}} + \frac{dq}{q^{\frac{2}{3}}} = -dp$, o sia all'equivalente $\frac{dq}{q^{\frac{2}{3}}} = \frac{-dp}{\frac{G^2 k^{\frac{4}{3}}}{g} p^2 + 1}$, che può prendere altresì l'aspetto seguente

$$-\frac{dq}{q^{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{g}{G^2 k^{\frac{4}{3}}} \cdot dp}{\frac{g}{G^2 k^{\frac{4}{3}}} + p^2}$$

. Pongo $\frac{g}{G^2 k^{\frac{4}{3}}} = C^2$ (3q), ed integrando mi si presenta

$$B + 3 q^{\frac{1}{3}} = \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } p.$$

XVIII. Determiniamo il valore della costante B riflettendo, che dovendo essere pel num.^{ro} IX dello Schediasma IX. $z = \infty$ nel punto A (fig. 2.), avremo in detto sito $v = -\frac{1}{z} = 0$; ma $v = -\frac{g q^{\frac{1}{3}}}{3 G^2 k^{\frac{4}{3}}} + q^{\frac{2}{3}} p$ (ng); dunque $p = \frac{g}{3 G^2 k^{\frac{4}{3}} q^{\frac{1}{3}}}$; e giacchè nel mentovato punto $q = k$, sarà $p = \frac{g}{3 G^2 k^{\frac{5}{3}}} = \frac{C^2}{3 k^{\frac{1}{3}}}$. Quindi $B = \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3 k^{\frac{1}{3}}} - 3 k^{\frac{1}{3}}$,

e

e perciò il vero integrale sarà

$$3 \cdot \overline{q^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}} = \text{Arco Rag. C Tang.}\, \rho - \text{Arco Rag. C Tang.}\, \frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}} \cdot \quad (36.)$$

Passo a stabilire la grandezza della costante g. In riguardo al punto A abbiamo Arco Rag. C Tang. ρ − Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}}$ = 0, in cui essendo $v = -\frac{1}{2} = 0$. Rispettivamente al punto A′ si avrà l'equazione $\rho = \frac{g}{3G^2 k^{\frac{4}{3}} \cdot \overline{k+L}^{\frac{1}{3}}} = \frac{C^2}{3 \cdot \overline{k+L}^{\frac{1}{3}}}$ dedotta dalla formola (29), ponendo in essa in cambio di q il suo valore k+L;

laonde Arco Rag. C Tang. ρ = Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3 \cdot \overline{k+L}^{\frac{1}{3}}}$.

Col raggio $LB = C = \frac{\sqrt{g}}{G k^{\frac{2}{3}}}$ (fig. 10.) descrivasi il circolo BOB′O′B, e condotta al punto B la toccante MBM′, si taglino $BH = \frac{C^2}{3 \cdot \overline{k+L}^{\frac{1}{3}}}$, $BR = \frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}}$, e si tirino le secanti LH, LR, che determinino gli archi BN, BI. Il semicircolo del raggio C si uguaglia a $\frac{2bC}{c}$, e nel punto A′ (fig. 2, e 10) dee adempiersi la formola

$$\text{Arco Rag. C Tang.}\, \frac{C^2}{3 \cdot \overline{k+L}^{\frac{1}{3}}} = BN + \frac{2nbC}{c}.$$

Conseguentemente

$$\text{Arco Rag. C Tang.}\, \frac{C^2}{3 \cdot \overline{k+L}^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag. C Tang.}\, \frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}} = \frac{2nbC}{c} + BN - BI = \frac{2nbC}{c} - NI.$$

Sia $NI = \frac{2bC}{Nc}$, e nel nominato punto A′ avremo $3 \cdot \overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}} = \frac{2bC}{c} \cdot \overline{n - \frac{1}{N}}$

$= \frac{2b}{c} \cdot \frac{\sqrt{g}}{G k^{\frac{2}{3}}} \cdot \overline{n - \frac{1}{N}}$, da cui si deduce

$$g = \frac{9c^2 \cdot G^2 k^{\frac{4}{3}} \cdot \overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}}^{\,2}}{4b^2 \cdot \overline{n - \frac{1}{N}}^{\,2}} \quad (37)$$

Fingasi $k = \infty$, ed in tal circostanza sarà $\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} = k^{\frac{1}{3}} + \frac{L}{3k^{\frac{2}{3}}}$. Inoltre l'arco NI = Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}}$ − Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3\,\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}}$ riuscirà

riuscirà minimo, e per conseguenza $\frac{1}{N}=0$ per adeguazione. Per la qual cosa scoprirassi $g=\frac{c^2L^2G^2}{4n^2b^2}$ conforme richiede la corda di grossezza costante G^2, a cui si eguaglia nella ipotesi di $k=\infty$ la grossezza $\frac{G^2k^{\frac{4}{3}}}{\overline{k+x}^{\frac{4}{3}}}$.

Se k è finita, ed $n=\infty$, ci si presenterà $g=\frac{9c^2}{4n^2b^2}\cdot G^2k^{\frac{4}{3}}\cdot\overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}-k^{\frac{1}{3}}}^2$

* Qui arriva il num.° XVIIII. il quale è stato malamente collocato alla pag. 60. Comincia esso così. XIX. Diamo un saggio della maniera &c.

*
XX. Per determinare i nodi, o punti di ~~punti~~ quiete, secondochè la corda si sfiocca in curve formate di ventri 2, 3, 4, &c., accenneremo l'artifizio. Avendo per mano la formola (3φ) $3\cdot\overline{g^{\frac{1}{3}}-k^{\frac{1}{3}}}=$ Arco Rag. C Tang. p $-$ Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}}$, ed essendo per le formole 3φ, e 32 $C^2=\frac{g}{G^2k^{\frac{4}{3}}}=$

$\frac{9c^2\cdot\overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}-k^{\frac{1}{3}}}^2}{4b^2\cdot\overline{n-\frac{1}{N}}^2}$, abbiamo $C=\frac{3c\cdot\overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}-k^{\frac{1}{3}}}}{2b\cdot\overline{n-\frac{1}{N}}}$ (33)

$\frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}}=\frac{3c^2\cdot\overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}-k^{\frac{1}{3}}}^2}{4b^2k^{\frac{1}{3}}\cdot\overline{n-\frac{1}{N}}^2}$. In oltre

$\frac{C^2}{3\cdot\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}}=\frac{3c^2\cdot\overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}-k^{\frac{1}{3}}}^2}{4b^2\cdot\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}\cdot\overline{n-\frac{1}{N}}^2}$. Rispettivamente

al punto A' la nostra formola si modifica così

$3\cdot\overline{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}-k^{\frac{1}{3}}}=$ Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3\cdot\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}}$

$-$ Arco Rag. C Tang. $\frac{C^2}{3\cdot k^{\frac{1}{3}}}=\frac{2nbC}{c}+BN-BI.$

~~+ Arco Rag. C Tang. $\frac{cC^2c}{3\cdot\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}}$ $-$ Arco Rag. C Tang. $\frac{cC^2}{3\cdot k^{\frac{1}{3}}}$.~~

L'aggregato di questi archi nella [illegible] ^ipotesi di^ ~~ed altra~~ ad $n=2$ si agguaglia ad IOA'O'AN.

Trovinto [illegible]

~~Riassumendo facilmente ... della ... stabilirai il raggio BC = c, dimodochè seguente la tangente $BK = \frac{c\,c^2}{3\cdot k^{\frac{1}{3}}}$, $BH = \frac{c^2}{3\cdot \overline{k+h}^{\frac{1}{3}}}$, ... $BK - BH = 3\cdot(\overline{k+h}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}})$.~~ *

Trovato il raggio c_1, si faccia $3q^{\frac{1}{3}} - 3k^{\frac{1}{3}} = Q$, o sia $27q = \overline{Q + 3k^{\frac{1}{3}}}^3$. Questa equazione è alla prima parabola cubica, e si costruisce così. Sia (fig. 11.) BPTG la nostra parabola cubica, in cui all'assissa $BA = k$ corrisponderà l'ordinata $AP = 3k^{\frac{1}{3}}$. Tirata PD parallela all'asse BA, sarà $BK = q$; $AK = PT = x$, $TT = Q = 3q^{\frac{1}{3}} - 3k^{\frac{1}{3}}$, e posta $q = BA' = k+h$, avremo $DG = Q = 3\cdot\overline{k+h}^{\frac{1}{3}} - 3k^{\frac{1}{3}}$.

Se ora (fig. 10.) TT ~~...~~ si faccia uguale all'ordinata (fig. 11.) $TT = 3q^{\frac{1}{3}} - 3k^{\frac{1}{3}}$, è chiaro si scopre, che a $BK = q$ si riferirà (fig. 10.) $BC = p$. Egli è dunque in mia potestà il descrivere la curva (fig. 11.) KQN, le cui coordinate $BK = q$, $KQ = p$. A $q = k = BA$ corrisponda $AK = p = \frac{c^2}{3k^{\frac{1}{3}}}$, e quando QM si eguaglia all'arco JO della fig. 10, dimodochè AJO sia un quadrante, la tangente (fig. 11.) $QN = p$ diviene infinita, e quindi si determina il relativo valore di $q = BQ$, a cui si riferisca nella curva, alla quale si può accostare la nostra corda, la massima grandezza dell'ordinata $y = c$, come vedremo nella costruzione di altra curva. Si cangia poscia la tangente in infinita negativa QN', ed indi si annulla, qualora TV si eguaglia (fig. 10) all'arco JTOB'. Dopo ciò la mentovata tangente torna positiva, e giunge

* col metodo del num.° precedente

giunga all'infinito, quando 2A2M pareggia (fig. 10.) $9 > OA'O'$. Il numero dei rami infiniti dalla parte delle ordinate positive, cioè K2N, L2e2N &c. si eguaglia ad n. La figura 11 è adattata ad $n = 2$. Altrettanti sono i rami infiniti dalla parte delle ordinate negative. Si termina finalmente con una porzione di ramo positivo 2LH, che taglia la tangente $A'H = p = \frac{c^2}{3\cdot\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}}$ eguale alla tangente BH della fig. 10, la qual tangente corrisponde a $y = BA' = k+L$ (fig. 11.)

Ho di sopra notato al num.° XVIII, che in riguardo ai nodi, o punti stabili esser deve $\frac{g}{3c^2k^{\frac{4}{3}}} = y^{\frac{1}{3}}p$, o sia $\frac{c^2}{3} = y^{\frac{1}{3}}p$. Fra gli assintoti GB, BA' si delinei l'iperbola GKZH corrispondente alla predetta equazione, la qual iperbola passerà pei punti K, H. Taglierà essa nei punti Z &c. i rami positivi per esempio LZ2N situati fra il primo K2N, e l'ultimo 2LH, ed il numero dei punti di intersezione si eguaglierà a quello dei rami intermedi, cioè ad $n-1$. Nella fig. 11 abbiamo un solo ramo medio, ed una sola intersezione, perchè supponendosi $n = 2$, è $n-1 = 1$. Dai punti Z &c. passino le ordinate SZYS &c, ed S &c. saranno i nodi o punti stabili, che rimarranno in quiete, quando la corda oscillerà scompartita nel numero dei ventri n.

~~Descriviamo ora la seguente linea &c.~~

X.XI. Descriviamo

XXI. ~~Pur~~ Ridurremo a computo la linea BS', &c. rivolgendo nuovamente ~~...~~ alla tavole degli archi riferiti alle tangenti. Giacche rispettivamente ai nodi abbiamo $\frac{C^2}{3} = g^{\frac{1}{3}}\rho$, avremo $\rho = \frac{C^2}{3 \cdot g^{\frac{1}{3}}}$. Sostituito questo valore in cambio di ρ nella formola (31), avrò

$3 \cdot g^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}} = \text{Arco Rag.} C \text{ Tang} \frac{C^2}{3 \cdot g^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag.} C \text{ Tang.} \frac{C^2}{3k^{\frac{1}{3}}}$

$= \overline{\text{Arco Rag.} 1. \text{ Tang} \frac{C}{3g^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag.} 1 \text{ Tang.} \frac{C}{3k^{\frac{1}{3}}}} \cdot C$

Sia come al num.ro XVIIII. $k + L = 4$, $k = 1$, ed attenendomi alla Fig. in comparsa di due venti, che suppone $a = a$, vado in traccia della distanza $BS' = g$ dal punto B dell' vero nodo S. Nella detta ipotesi ho già stabilito $C = 0,4 4 3 5 7 5 4$. Col mezzo di varj tentativi egli è di uopo assegnare a g il competente valore, onde si avveri la sovrapposta equazione, il che ottenuto, sarà il detto valore $= BS'$, e si eguaglierà alla lontananza del nodo S dal punto B.

Ho dunque dopo molte prove trovato $g^{\frac{1}{3}} = 1,4 9 7 9 1 7 2$, e consequentemente $g = 3,3 6 4 9 6 0 6 1 2 2 1 5 9 7 7 2 9 6 4 4 4$ come qui si dimostra. E primieramente $3g^{\frac{1}{3}} - 3k^{\frac{1}{3}} = 3 \cdot 1,4 9 7 9 1 7 2 - 3$ $= 1,4 9 3 7 5 1 6$.

Cerchiamo adesso ~~ora~~ il valore di

$\overline{\text{Arco Rag.} 1 \text{ Tang.} \frac{C}{3g^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag.} 1 \text{ Tang.} \frac{C}{3k^{\frac{1}{3}}}} \cdot C$

La tang. $\frac{C}{3g^{\frac{1}{3}}} = \frac{0,4 4 3 5 7 5 4}{4,4 9 3 7 5 1 6} = 0,1 0 7 6 1 0 6$

Mi insegnano le tavole, che

l'arco di g^di^ 6 min. 9 ha la tang. 1077519
l'arco di g^di^ 6 min. 8 ha la tang. 1074576

Differenza delle predette tangenti = 2943

Sottrò la minore di esse tangenti dalla tangente $\frac{c}{3\sqrt{2}}$, e trovo

$$\begin{array}{r} 1076106 \\ 1074576 \\ \hline 1530 \end{array}$$

Si inferisca, che la tangente 1076106 compete all'arco di g^di^ 6 min.^ti^ 8 $\frac{1530}{2943}$ = min.^ti^ 368,5199. Sia BN (fig. 10) uguale ad un tal arco, supposto il raggio AL = 1. Si aggiunga ad esso il semicircolo NON' = g^di^ 180 = min.^ti^ 10800, e ne risulterà l'arco ANOB'N' = min.^ti^ 11168,5199, che serve alla determinazione del nodo S (fig. 12). E siccome il vero il punto C, a cui corrisponde il massimo valore dell'ordinata = y = c, richiede la tangente (fig. 10) BL = ∞, che compete al quadrante BO, e trovandosi prima (fig. 12) il punto C del punto S, ne segue che l'arco relativo a questo punto, ha da superare il quadrante, e per conseguenza da uguagliarsi (fig. 10) a BNOB'N'.

* nella curva, alla quale si può accomodare la nostra corda,

Osservo, che ~~questo~~ essere [illegible] la tangente $\frac{c}{3k^{\frac{1}{2}}} = \frac{c}{3} = \frac{0,48357\,54}{3}$ = 0,1611918, e che ad essa, pel num.^ro^ XIX *

* conviene ~~compete~~ l'arco di g^di^ 9 min.^ti^ 9,4107 = min. 549,4107.

~~L'arco di g^di^ 9 min. [illegible] ha la tang. 160[illegible]~~
~~l'arco di g^di^ 9 min. [illegible] ha la tang. [illegible]~~
~~Differenza delle soprascritte tangenti = [illegible]~~
~~Sottro la più piccola di esse tangenti dalla tangente c/(3k^½)~~ ~~[illegible]~~
~~e trovo la loro differenza~~ = [illegible]

Avremo
Gli

Avvertenza preliminare

Arco [illegible] Tang. [illegible] = gradi 9 minuti 9 $\frac{12126}{29485}$

= gli [illegible] 9348124 [illegible]

Gli archi trovati sono

$BNOB'N' =$ minuti $11168,5199$

$BD =$ minuti $549,4107$, e perciò

$DOB'N' =$ minuti $10619,1092$

Poichè un semicircolo = gradi 180 = minuti 10800 = $\frac{355}{113} = 3,1415929$, esprimeremo l'arco $\frac{DOB'N'}{C}$ in parti del raggio predetto mediante l'analogia   in riguardo al raggio 1, esprimeremo &c

$10800,0000 : 10619,1092 :: 3,1415929 :$

$3,0889739 = \text{Arco } R.\ 1\ T.\frac{C}{3g^{\frac{2}{3}}} - A.R.\ 1\ T\frac{C}{3k^{\frac{2}{3}}} = \frac{DOB'N'}{C}$

e moltiplicando per $C = 0,4835754$,

ci si presenterà $3,0889739 \cdot 0,4835754$

$= 1,4937516 = A.R.C\,T.\frac{C^2}{3g^{\frac{2}{3}}} - A.R.C\,T.\frac{C^2}{3k^{\frac{2}{3}}} = DOB'N'$

~~= [illegible] raggio [illegible]~~

~~Ora~~ Di sopra abbiamo scoperto

$3\cdot\overline{g^{\frac{2}{3}} - k^{\frac{2}{3}}} = 1,4937516$; dunque

con [illegible] adeguazione si adempie la equazione $3\cdot\overline{g^{\frac{2}{3}} - k^{\frac{2}{3}}} = A.R.C\,T.\frac{C^2}{3g^{\frac{2}{3}}} - A.R.C\,T.\frac{C^2}{3k^{\frac{2}{3}}}$

posta (fig. 12) $AS = g = 3,3609606$,
e per conseguenza S è il nodo cercato,
quando $n = 2$.

~~rendendosi ovvero alle ...~~ ~~referirsi alle immaginarie~~.

XXII. ~~...~~ A.gevol.^te^ si costruisca la curva, a cui oscillando si adatta la corda del presente esempio. Avendo già delineata la curva, che ha per coordinate (fig. 11) $BK = q$, $KE = p$, col mezzo della formola (ng) $-\frac{1}{2} = \frac{-gq^{\frac{1}{3}}}{3G^2k^{\frac{4}{3}}} + q^{\frac{2}{3}}p$ si rende manifesto il relativo valore di z, e perciò mi è concesso il descrivere la curva (fig. 12.) $QGCG'::Q'$, $\epsilon g n G n C n G' n Q'$ &c., nella quale alle ascisse $BK = q$ corrispondano le ordinate $KG = z$. Quando $q = BA = k$, abbiamo pel num.^o^ XVIII. $p = \frac{g}{3G^2k^{\frac{5}{3}}}$. Sostituiti questi valori nella formola ng si trova $-\frac{1}{2} = \frac{-g}{3G^2k} + \frac{g}{3G^2k} = 0$ e per conseguenza $z = \mp\infty = AQ$. Tagliate BC, BnC uguali alle linee similmente denominate della fig. 11 ~~...~~, e giacchè in tali circostanze $p = \mp\infty$, sarà per la formola (ng) $-\frac{1}{2} = \mp\infty$, e conseguentemente $z = \pm 0$. Che se si segnino determini BS &c. ~~...~~ alla qual ascissa $= BS$ &c della fig. 11, in riguardo $p = \frac{g}{3G^2k^{\frac{4}{3}}q^{\frac{1}{3}}}$, avremo $-\frac{1}{2} = \frac{-gq^{\frac{1}{3}}}{3G^2k^{\frac{4}{3}}} + \frac{gq^{\frac{1}{3}}}{3G^2k^{\frac{4}{3}}}$, cioè $\pm\infty = z = \begin{cases} SQ' \\ SnQ \end{cases}$. Avverto, che ponendo $BK = q$ di lunghezza media fra BA, e BC, onde si abbia $q > k$, è (fig. 11) $KE = p > AE = \frac{C^2}{3k^{\frac{5}{3}}} = \frac{g}{3G^2k^{\frac{5}{3}}}$, e quindi $q^{\frac{2}{3}}p > \frac{k^{\frac{2}{3}}gg}{3Gk^{\frac{5}{3}}} = \frac{gq^{\frac{1}{3}}}{3G^2k^{\frac{4}{3}}}$. Per la formola (ng) $n - \frac{1}{2} = \frac{-gq^{\frac{1}{3}}}{3G^2k^{\frac{4}{3}}} + q^{\frac{2}{3}}p$. adunque scoprivemo $-\frac{1}{2}$ uguale ad una quantità positiva, e perciò z uguale ad una quantità negativa. Ciò significando

dovessi

Schediasma X.

Dovevasi prendere la z negativamente in riguardo alle p, cioè a dire per direzione contraria, come in fatti la ho determinata nella fig. 12.

Conciossiachè pel num.ro III. logaritmo $v = S - 2dx = S - 2dy = \log. y$ nella logistica della suttangente 2; e preso c come proto=numero; quel numero, che nel ramo delle ordinate decrescenti della predetta logistica corrisponde al log. $= S - 2dy =$ CKG, si eguaglia alle ordinata $KQ = y$ della curva per esempio AQ7S'Q7A', alla quale si accomoda la nostra corda, quando $n = 2$. Nei punti A, S', A' l'ordinata è nulla; perchè quivi l'aja CAQ, CS'Q', ecc. è infinita, ed al logaritmo infinito corrisponde il num.ro $y = 0$ nel mentovato ramo delle ordinate calanti. Al contrario nei punti C, ec. $y = c$ massimo suo valore, a cagione che $S - 2dy = 0$, ed al $\log = 0$ conviene al protonumero $= c = C7 = 2C27$.

Trovare il tempo, nel quale oscilla la corda, la cui grossezza $= \frac{G^2 k^{\frac{4}{3}}}{\overline{k+x}^{\frac{4}{3}}}$

XXIII. Le due formole (26) $g = \frac{3aPG^2k}{M} \cdot \left(\frac{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}}{\overline{k+L}^{\frac{1}{3}}}\right)^2$,

(32) $g = \frac{9c^2}{4b^2} \cdot \frac{G^2 k^{\frac{4}{3}} \cdot \left(\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(n - \frac{1}{N}\right)^2}$ somministrano

il valore di

$$a = \frac{3c^2}{4b^2} \cdot \frac{M \cdot \overline{k+L}^{\frac{1}{3}} \cdot k^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}\right)^2}{P \cdot \left(n - \frac{1}{N}\right)^2} \quad (33)$$

E giacchè pel num.ro XXII. dello Schediasma IX. il tempo di una vibrazione della corda $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$, ne risulta

$$t = \frac{c}{2b \cdot \left(n - \frac{1}{N}\right)} \sqrt{\frac{3M \cdot \overline{k+L}^{\frac{1}{3}} \cdot k^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\overline{k+L}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}\right)}{hP}} \quad (34)$$

Supposto $n = \infty$ scopriremo

$t =$

Schediasma X.

$$t = \frac{c}{2bu}\sqrt{\frac{3M\cdot\overline{K+L}^{\frac{1}{3}}\cdot K^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\overline{K+L}^{\frac{1}{3}}-K^{\frac{1}{3}}\right)}{hP}}.$$

Se fosse $K=\infty$, e perciò $\overline{K+L}^{\frac{1}{3}} = K^{\frac{1}{3}} + \frac{L}{3K^{\frac{2}{3}}}$, ed $\frac{1}{N}=0$, poichè in tal circostanza svanisce l'arco ND (fig. 10.), si troverebbe la $t = \frac{c}{2bu}\sqrt{\frac{ML}{hP}}$, conforme richiedono le corde ugualmente grosse. Ed in fatti la grossezza della corda $\frac{G^2 K^{\frac{2}{3}}}{\overline{K+x}^{\frac{2}{3}}}$ sarebbe adequatamente costante, ed $= G^2$.

~~Il tempo delle vibrazioni della stessa corda [illegible] $\frac{1}{n-\frac{1}{N}}$ [illegible] (fig. 10.) [illegible] seriamente [illegible] con [illegible] tal corda [illegible] le seguenti proporzioni~~

~~$\frac{[illegible]}{15}$, $\frac{[illegible]}{31}$, $\frac{[illegible]}{47}$, $\frac{[illegible]}{63}$, ecc. [illegible]~~

~~[illegible] delle vibrazioni fatte in tempo [illegible] proporzionale alla serie~~

~~$\frac{15}{16}$, $\frac{31}{16}$, $\frac{[illegible]}{16}$, $\frac{63}{16}$, ecc. [illegible]~~

~~[illegible] vibrazioni [illegible] la corda [illegible] più grossa [illegible] della corda [illegible] elastiche [illegible] al più grosso della [illegible] nello esempio [illegible].~~

~~[illegible] alle infinite [illegible] ND [illegible] non [illegible] nello stato [illegible].~~

Ma ci si lascia [illegible] $\frac{[illegible]}{N}$

può

[illegible]

(Regola). [illegible]

n e conseguentemente i suoni, o i numeri delle vibrazioni fatte in tempo eguale come $n - \frac{1}{N}$. Nell'esempio del num.ro XVIIII, in cui si stabilisce $K+L = 4$, $K = 1$, si avrebbe:

$n=1,\ \frac{1}{N} = \frac{1573279}{31415929}$

$n=2,\ \frac{1}{N} = \frac{793951}{31415929}$

$n=3,\ \frac{1}{N} = \frac{530001}{31415929}$

$n=4,\ \frac{1}{N} = \frac{397477}{31415929}$

I tempi delle vibrazioni della stessa corda stanno come $\frac{1}{n - \frac{1}{N}}$, [illegible]

I suoni pertanto seguirebbero adeguatamente la proporzione dei seguenti num.ri:

Valori di n	Proporzioni fra i suoni
1	29642650
2	62037907
3	93717747
4.	12526[illegible]
&c	

I primi due suoni si corrispondono in Ottava crescente sopra 1:2 per la ragione $\frac{62037907}{59645300}$ media fra le due $\frac{27}{26}$, $\frac{26}{25}$, cioè a dire per un minor semitono scarso.

I suoni secondo e terzo formano una Quinta che sopra 2:3 cresce per la ragione $\frac{93717747}{93055[illegible]60}$ molto prossima a $\frac{142}{141}$ che non giunge a $\frac{7}{12}$ di Comma.

[illegible]

Dai

~~[illegible]~~ :

\# Posto che la corda si acconciasse ad una delle figure nuove da me determinate, renderebbe il suono ad essa figura competente, e passerebbe da uno stato all' altro di queste nel tempo di una vibrazione. Ma ripiegandosi in una curva composta di molte ~~[illegible]~~ delle predette curve, il che succede qualora colle maniere consuete si incurva al punto, produrrebbe un aggregato di suoni appropriati alle curve componenti, e riferendosi questi in ragioni aritmetiche, non ritornerebbe più [illegible] dalle resistenze, allo stato assoluto di queste. Si applichi alla nostra corda quello, che ho scritto al num.^ro XXV. della corda dell' esempio II. al num.^ro XV.

XXIIII. La grossezza della corda secondo l'espressione $\frac{G^2 k^{\frac{4}{3}}}{\overline{k-x}^{\frac{4}{3}}}$, e si vibrerà ~~una corda~~ nel

$$\text{tempo } t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}} = \frac{c}{2b \cdot n - \frac{1}{N}} \sqrt{\frac{3M \cdot \overline{k-L}^{\frac{1}{3}} \cdot k^{\frac{1}{3}} - \overline{k+L}^{\frac{1}{3}} + k^{\frac{1}{3}}}{hp}} \quad (55)$$

Se $k \not< L$, la grossezza ascende all' infinito posta $x = k$, il che ripugna alla Fisica.

~~[illegible]~~

Dai suoni terzo e quarto è composta una Quarta 3:4, che sovrabbonda per la proporzione $\frac{125266043}{124957049}$, che ~~[illegible]~~ di mezzo fra $\frac{406}{405}$, 405 : 404 quinta parte in circa del comma. La ragione fra i suoni quarto e quinto, quinto e sesto, &c. ~~[illegible]~~ si avvicinerebbero talmente alle armonie 4:5, 5:6 &c., che l'orecchio non ne discernerebbe la differenza, che riuscirebbero sempre più piccole.

Consideriamo adesso la relazione fra i suoni acuti, ed il grave. Ho già detto che i due primi suoni si riferiscono in Ottava crescente per una ragione media fra le due $\frac{27}{26}$, $\frac{26}{25}$.

La ragione fra il primo ed il terzo suono cresce sopra 1 : 3 per la frazione $\frac{93717747}{69527950}$ media fra $\frac{23}{22}$, $\frac{22}{21}$.

Più grande è ancora la differenza $\frac{125266043}{119370600}$ media fra $\frac{22}{21}$, $\frac{21}{20}$, per cui il suono quarto paragonato col primo cresce sopra la doppia ottava 1 : 4. per la ragione $\frac{314159929}{294426050}$ assai prossima a $\frac{20}{19}$. Si congietturi dalle cose dette, quanto riuscirebbe ingrata all' orecchio una tal mistura di suoni.

rispetto al confronto, \+ soggiacerebbe un' armonia che il suono grave colli acuti suoi, \+ se rapporterebbe il rapporto 1 : 2

\# Posto che

[illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] ma [illegible] del tempo, si escludono gli stati assoluti, e [illegible] di quiete, manca il fondamento alla [illegible] di [illegible] il [illegible] della corda [illegible]. Accade ciò con frequenza nelle corde [illegible] quando la loro grossezza è ineguale. Per giudicare del [illegible] in qualche maniera, [illegible] il senso in quegli stati di quiete quelli istanti, che [illegible] di mezzo fra i diversi istanti, in cui si [illegible] in quiete le particole della corda, o l'intervallo di tempo fra due prossimi stati di riposo, [illegible] il [illegible] della corda. Ma siccome, non cessando mai la laterale comunicazione di moto fra le dette particole componenti la corda, il detto intervallo è variabile, così il [illegible] si [illegible] incostante, ed [illegible]. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

+ a capo

* [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]. Ma [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] del tempo [illegible]

Schediasma X

~~[illegible]~~ $\frac{\dots \hat{C}}{3\,k^{\frac{1}{3}}}$ ~~[illegible]~~ $\frac{\dots \hat{C}}{3\cdot\overline{k+l}^{\frac{1}{3}}}$, e ~~[illegible]~~

(Aggiunta dal n.ro XIX. alla pag. 48.)

XVIIII. Diamo un saggio della maniera di ridurre a computo il raggio $LB = C$, e collo stesso incontro anche l'arco NA

$= \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3\cdot k^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3\cdot\overline{k+l}^{\frac{1}{3}}}$

$= \frac{2bC}{Nc}$. Prima d'ogni altra cosa avverto, che l'equazione $\frac{2nbC}{c} + \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3\cdot\overline{k+l}^{\frac{1}{3}}}$

$- \text{Arco Rag. } C \text{ Tang. } \frac{C^2}{3\cdot k^{\frac{1}{3}}} = 3\cdot\overline{k+l}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}$ si può esprimer così

$\overline{\frac{2nb}{c} + \text{Arco Rag. } 1 \text{ Tang. } \frac{C}{3\cdot\overline{k+l}^{\frac{1}{3}}} - \text{Arco Rag. } 1 \text{ Tang. } \frac{C}{3\cdot k^{\frac{1}{3}}}} \cdot C$

$= 3\cdot\overline{\overline{k+l}^{\frac{1}{3}} - k^{\frac{1}{3}}}$.

Sia $k+l = 8$, $k = 1$, e giacchè $\frac{2b}{c} = \frac{355}{113} = 3,1415929$, avremo nella ipotesi di $n = 1$

$\overline{3,1415929 + A.R.1\,T\frac{C}{6} - A.R.1\,T\frac{C}{3}} \cdot C$

$= 3$. Agevolmente si scopre dover essere a un di presso $C = 1$. Col mezzo frattanto delli attentazione ne determineremo il preciso valore, cioè $C = 1,0052730$, onde si abbia $\frac{C}{3} = 0,3350910$,

$\frac{C}{6} = 0,1675455$.

Che questo valore di C sia rettamente determinato, si rende manifesto col seguente computo. Impariamo

Dalle

Schediasma X.

Dalla Tavola, che

l'arco di g.^{di} 18 min. 32 ha la tang. = 3352424

l'arco di g.^{di} 18 min. 31 ha la tang. = 3349188

Differenza delle predette tangenti = 3236

La minore di esse tangenti si sottr. dalla tangente $\frac{c}{3}$ e si troverà

3350910
3349188
= 1722

la loro differenza

Quindi, come può facilmente dimostrarsi, considerando confondersi colla linea retta l'arco di un minuto, ne risulta essere

Arco Tang. 3350910 = g.^{di} 18 min.^{ti} 31 $\frac{1722}{3236}$

= g.^{di} 18 min. 31, 5321.

Ci insegnano le Tavole stesse, che

l'arco di g.^{di} 9 min.^{ti} 31 ha la tang. = 1676416

l'arco di g.^{di} 9 min.^{ti} 30 ha la tang. = 1673426

Differenza delle predette tangenti = 2990

Sottro la minore di esse tangenti dalla tangente $\frac{c}{6}$, e scopro

1675455
1673426
= 2029

la loro differenza

Avremo pertanto

Arco Tang. 1675455 = g.^{di} 9 min.^{ti} 30 $\frac{2029}{2990}$

= g.^{di} 9 min.^{ti} 30, 6786.

Gli archi trovati sono

BA = g.^{di} 18 min. 31, 5321

BN = g.^{di} 9 min. 30, 6786, laonde

NA = g.^{di} 9 min. 00, 8535 = min.^{ti} 540, 8535.

Essendo un semicircolo = g.^{di} 180 = min.^{ti} 10800,

esprimeremo l'arco $\frac{NA}{c}$ in parti del raggio

= 1 mediante l'analogia

Schediasma X.

$10600,0000 : 540,4535 :: 3,1415929 = \frac{26}{c}$
$: 0,1573279 = \frac{N1}{C}$. Perciò

$\overline{3,1415929 - 0,1573279} \cdot 1,0052730$
$= 3$, e per conseguenza
$2,9842650 \cdot 1,0052730 = 3$; e
finalmente $3,0000010 = 3$, equazione
ne' pienamente giusta.

Avendo stabilito al num.° XVIII. $N1$
$= \frac{26C}{Nc}$; ne segue essere $\frac{N1}{C} = \frac{26}{c} \cdot \frac{1}{N}$
$= 3,1415929 \cdot \frac{1}{N}$: ma poco fa ho
scoperto $\frac{N1}{C} = 0,1573279$; dunque
$\frac{1}{N} = \frac{1573279}{31415929}$ nella ipotesi di
$k = 1$, $k+l = 6$, e di $n = 1$.

Suppongasi ora $n = 2$, e ci si
presenterà l'equazione
$\overline{6,2431456 + A.k.1\,T.\frac{C}{6} - A.k.1\,T.\frac{C}{3}} \cdot C$
$= 3$. In questo incontro dee C poco
allontanarsi da $\frac{1}{2}$. Usando adunque
il metodo della attentazione troveremo
$C = 0,4835754$, e conseguentemente
$\frac{C}{3} = 0,1611918$; $\frac{C}{6} = 0,0805959$.

Il calcolo, che segue, dimostra l'esattezza
dello stabilito valore di C.

L'arco di g.^{di} 9 min.^{ti} 10 ha la tang.^{te} = 1613677
L'arco di g.^{di} 9 min.^{ti} 9 ha la tang.^{te} = 1610692
Differenza delle predette tangenti = 2985
La più piccola di esse tangenti la sottro
dalla tangente $\frac{C}{3}$ = 1611918
1610692

e trovo la loro differenza = 1226
Avremo pertanto Arco Tang. 1611918 =
g.^{di} 9 min.^{ti} 9 $\frac{1226}{2985}$ = g.^{di} 9 min.^{ti} 9,4107.

Schediasma X.

In oltre

l'arco di g.^{di} 4 min.^{ti} 37 ha la tang. = 807509

l'arco di g.^{di} 4 min.^{ti} 36 ha la tang. = 804581

Differenza della predetta tangente = 2928

Sottro la più piccola di esse tangenti dalla tangente $\frac{C}{6}$ = 805959

= 804581

e scopro la loro differenza = 1378

Per la qual cosa Arco Tang. 805959 = g.^{di} 4 min.^{ti} 36 $\frac{1378}{2928}$ = g.^{di} 4 min.^{ti} 36,4706

Gli archi trovati sono, posto n = 2,

BQ = g.^{di} 9 min.^{ti} 9,4107

BN = g.^{di} 4 min.^{ti} 36,4706, e quindi

NQ = g.^{di} 4 min.^{ti} 32,9401 = min.^{ti} 272,9401

Si esprimerà questo arco pel raggio = 1 col mezzo dell'analogia 10800,0000 : 272,9401 :: 3,1415929 = $\frac{2b}{c}$: 0,0793951 = $\frac{NQ}{C}$. Perciò

$\overline{6,2831858} - \overline{0,0793951} \cdot \overline{0,4835754}$ = 3, ovvero

6,2037907 . 0,4835754 = 3.

ed in fatti effettuando la moltiplicazione si scopre 3,0000006 = 3, equazione adequatamente vera.

Giacchè pel num.^{ro} XVIII NQ = $\frac{2bC}{Nc}$, avremo $\frac{NQ}{C} = \frac{2b}{c} \cdot \frac{1}{N}$ = 3,1415929 . $\frac{1}{N}$: ma conforme ho testè provato nella supposizione di n = 2, $\frac{NQ}{C}$ = 0,0793951; dunque $\frac{1}{N} = \frac{793951}{31415929}$

e quando n = 4, si scoprirà C = 0,2394906, $\frac{NQ}{C}$ = 0,0397673, $\frac{1}{N} = \frac{397673}{31415929}$.

Posto n = 3, sarà C = 0,3201898

$\frac{NQ}{C}$ = 0,0530001, $\frac{1}{N} = \frac{530001}{31415929}$.

XX. Per determinare &c.

a

~~sia fatta, che rimanendo stendendo quella corda~~ la quale ~~ad una figura irregolarmente non possono mai accomodarsi neanche si ac-cresca~~.

\# ~~Supposto che siano tali, ... vale ... la corda del tempo ... allora ... la grossezza~~ $\frac{4}{3}$ ~~della corda,~~ $\frac{4}{3}$ quando ... ~~impedirebbe la ... alle ... e conseguentemente~~ ~~l'...~~ che ~~fisicamente ...~~ ~~... alle vibrazioni~~.

XXIV. Sin qui ho trattato di quelle corde, che nelle oscillazioni si adattano a curve espresse da formole differenziali, che ammettendo la separazione delle variabili, permettono che si riduca a computo il tempo delle vibrazioni delle corde medesime, purché non sia immaginario. Scorderemo frattanto due specie di corde, che quantunque si spieghino in curve dinotate da equazioni differenziali, nelle quali non si sa sviluppare le incognite, nulladimeno si possono determinare col computo i tempi delle loro oscillazioni. La condizione, che si richiede, consiste in ciò, che le parti della corda prese da un punto estremo siano sempre simili alla corda totale. Questa circostanza si avvera in due casi, cioè quando la corda sono di figura triangolare, o conica; imperciocché le loro parti prese dal vertice del triangolo, o del cono, serbano costantemente somiglianza col tutto. Trovato poscia il tempo, in cui si vibrano le nostre corde divise in un numero infinito di parti, e dimostrando poscia, che i tempi delle vibrazioni delle corde

simili

~~Si sperimenta ... ad ... anche ... di più ... può ... perfettamente ... Sembrami ... corde di ... quando la loro ... Sembrami di avere ... ecc.~~

\# ~~Anzi che oppor-tunamente ... alla mente ... ... musica ... dipende dalla ... strettezza del ... perfettamente ... corrispondenti ... proporzione, ... armonia ... Ma se ... ... la quale ... perfetta ... armonia, ...~~

Esempio IV.
Trovare il tempo, in cui si vibra una corda di figura triangolare.

simili stanno come una data potestà dei lati omologhi, si passa facilmente alla determinazione del tempo di una vibrazione, quando il numero dei versi è finito.

XXVI. Della corda di figura triangolare ne ho implicitamente tenuto discorso, allorchè sono andato in traccia della legge, che regola le vibrazioni del tamburo; ~~[illegible]~~ i cui minimi settori sono corde triangolari.

Rappresenti CanaC (fig. 2.) una delle nostre corde. Sia $CA = L$, $ana = G$, $CK = g$, $KH = dg$, e si chiami M la massa della corda, P il peso, o forza che la tende. Si pronunzia il suo volume $V = \frac{GL}{2}$. Dalla similitudine dei triangoli CanA, CknK ne deduco l'analogia

$$CA : CK :: ana : knk$$
$$L : g :: G : \frac{Gg}{L},$$

che determina $knk = \frac{Gg}{L}$. Perciò si ha il volume $knG = \frac{G\,gdg}{L}$, ~~[illegible]~~. La massa dell'elemento knG si stabilisca coll'analogia $\frac{GL}{2} : M :: \frac{Ggdg}{L} : \frac{2Mgdg}{L^2}$, l'ultimo termine della quale si eguaglia alla massa cercata.

Sia $KH = dg$ una delle infinite parti, nelle quali si suppone divisa la corda CenaC, e potendosi considerare $GnG = LnL$, cioè a dire costante la grossezza della cordicella, la cui lunghezza KH avremo per la legge della vibrazione delle corde egualmente grosse $t = \frac{c}{nb}\sqrt{\frac{2Mgdg^2}{L^2hP}}$ (30),

dinotando

dinotando al solito t il tempo di una oscillazione espresso in secondi, $\frac{c}{2b}$ la proporzione fra il raggio, e la semicirconferenza circolare, ed h la lunghezza del pendolo a secondi.

Concios[s]iachè tutti gli elementi KM, nei quali si scompartisce la corda, abbiano ad essere unisoni, la quantità $q^{\frac{1}{2}}dq$ dee considerarsi costante. Dovrà dunque la $Sq^{\frac{1}{2}}dq$ $= \frac{2}{3}q^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}$ quando $CK = q = CA = L$, dovrà essere (chiamato n il numero delle parti, nelle quali la corda è divisa)

$$\frac{\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}}{n} = q^{\frac{1}{2}}dq, \text{ o sia } \frac{4L^3}{9n^2} = q\,dq^2.$$

Fatta la sostituzione nella formola (36) ne risulta $t = \frac{c}{3nb}\sqrt{\frac{2ML}{hp}}$ (37), tempo di una vibrazione della nostra corda divisa nel numero infinito n di parti.

XXVII Col metodo usato al numero XXIV. dello Schediasma IX. troveremo le distanze dal punto C dei nodi o linee stabili, per esempio LxL, che separano una parte dall'altra, quando $n = \infty$. Giacchè $Sq^{\frac{1}{2}}dq$ $= \frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}$, posta $q = L$, questa sommatoria per ∞ è relativa alla distanza divisa per ∞ del primo nodo dal punto C. Avremo pertanto $\frac{\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}}{\infty} = \frac{2}{3}q^{\frac{3}{2}}$, e quindi

$$q = \frac{L}{\infty^{\frac{2}{3}}}.$$

L'equazione $\frac{2.\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}}{\infty} = \frac{2}{3}q^{\frac{3}{2}}$ ci dà la distanza del secondo nodo $q = \frac{2^{\frac{2}{3}}.L}{\infty^{\frac{2}{3}}}$

Ne nascerà dunque la serie delle accennate distanze dal punto C, $\frac{L}{\infty^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{2^{\frac{2}{3}}.L}{\infty^{\frac{2}{3}}}$, $\frac{3^{\frac{2}{3}}.L}{\infty^{\frac{2}{3}}}$ &c. $\frac{\infty^{\frac{2}{3}}.L}{\infty^{\frac{2}{3}}} = L$.

Schediasma X.

XXVIII. Ho dimostrato al num.ro XVIII dello Schediasma IX, che due palle di tamburo della medesima materia, ugualmente grosse, e rese dalla stessa somma di forze si vibrano o intere, o divise in pari numero di parti in tempi, che si esprimono come le radici quadrate dei cubi dei loro diametri. Con un raziocinio affatto uniforme si prova, che i tempi delle oscillazioni di due corde simili CLnL, CAnA, del pari grosse, della stessa materia, e tese dal medesimo peso p si corrispondono come la radici seconde dei cubi delle loro lunghezze CK, CA, cioè a dire come $\overline{CK}^{\frac{3}{2}}$, $\overline{CA}^{\frac{3}{2}}$.

Ciò posto, sia CLnL la prima delle parti infinitesime, od unisone, nelle quali si suppone divisa la corda CAnA; e poichè sta immobile la linea LnL, io posso considerare CLnL come una corda. Essendo dunque, conforme ho testè dimostrato, $CK = \frac{L}{\omega^{\frac{2}{3}}}$, se ne raccoglie $\overline{CK}^{\frac{3}{2}} = \frac{L^{\frac{3}{2}}}{\omega}$; e [uguale] il tempo di una vibrazione della corda $CLnL = \frac{c}{3056}\sqrt{\frac{2ML}{hp}}$, si avrebbe l'analogia

$$\overline{CK}^{\frac{3}{2}} = \frac{L^{\frac{3}{2}}}{\omega} : \overline{CA}^{\frac{3}{2}} = L^{\frac{3}{2}} :: \frac{c}{3056}\sqrt{\frac{2ML}{hp}} : \frac{c}{36}\sqrt{\frac{2ML}{hp}}$$

= al tempo di una vibrazione della corda intera CAnA.

Che se CLnL, LnG siano due minime parti unisone, onde si abbia $CH = \frac{n^{\frac{2}{3}} \cdot L}{\omega^{\frac{2}{3}}}$, e per conseguenza $\overline{CH}^{\frac{3}{2}} = \frac{n \cdot L^{\frac{3}{2}}}{\omega}$, pongo al paragone la corda CGnG, che oscilla divisa in due porzioni unisone, colla corda CAnA, che parimente oscilla in due porzioni unisone di sua brevità, e a me si presenta l'analogia

$\overline{CH}^{\frac{3}{2}}$

$\overline{CH}^{\frac{3}{2}} = \frac{nL^{\frac{3}{2}}}{cs} \cdot \overline{CA}^{\frac{3}{2}} = L^{\frac{3}{2}} :: \frac{c}{3\cdot 36}\sqrt{\frac{nML}{hP}} : \frac{c}{n\cdot 36}\sqrt{\frac{nML}{hP}}$

$= t$, tempo di una vibrazione della corda CANA, che oscilla scompartita in due membri unisoni.

Mettendo al confronto le aggiugnate della tre porzioni minime parti unisone colla corda CANA, che si agita divisa in tre porzioni, scoprirò il tempo impiegato in una oscillazione da quest' ultima corda, cioè $t = \frac{c}{3\cdot 36}\sqrt{\frac{nML}{hP}}$;

// e generalmente, qualunque sia il numero n delle parti unisone, si troverà sempre $t = \frac{c}{n\cdot 36}\sqrt{\frac{nML}{hP}}$; laonde la stessa formola si adatta a qualsivoglia valore di n o finito, o infinito. (Va a capo)

Mi ristringo a cavare la unica conseguenza, che i tempi di una vibrazione della stessa corda, secondochè la vibra o intera, o divisa in 2, 3, 4, &c. parti unisone, saranno proporzionali alla serie armonica 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c; e quindi i suoni, o i numeri delle oscillazioni fatte in tempo uguale osserveranno la ragione dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, &c, conforme interviene altresì nelle corde cilindriche.

= XXVIIII. Avverto, che senza punto alterare il valore del tempo t, le sezioni per esempio ~~[illegible]~~ della corda possono cangiarsi di rettangolari in circolari, purchè però ~~[illegible]~~ uguaglianza fra le sezioni dell'una, e dell'altra figura corrispondenti ed assieme uguali. In tale ipotesi nascerebbe la figura della corda dal girare (Fig 13) la parabola Apolloniana CGA intorno alle asse CA; imperciocchè stando

sempre

La condizione annunziata delle nostre corde consiste in ciò, che le sezioni, o sia le grossezze variabili si corrispondano nella ragione delle ascisse, nulla importando poi che le dette sezioni siano piuttosto rettangolari che circolari. Lo stesso accade anche nelle corde di grossezza costante, la figura della quale non ha punto luogo nei tempi delle loro vibrazioni.

sempre per la natura di essa curva CK come $\sqrt[3]{KG^2}$, la sezione circolare il cui raggio KG, o sia la grossezza della corda accetterebbe costantemente la proporzione delle ascisse CK = g. tt

XXXIII. [illegible] (fig. 1) I nodi della corda Caa', che venga divisa nel numero di parti n, si determinano agevolmente. Cominciando dal punto C si prenda la serie di parti infinitesime $\frac{L}{\infty^{\frac{2}{3}}}, \frac{2^{\frac{2}{3}}L}{\infty^{\frac{2}{3}}}, \frac{3^{\frac{2}{3}}L}{\infty^{\frac{2}{3}}}$ &c. $\frac{n^{\frac{2}{3}}L}{\infty^{\frac{2}{3}}}$, nella quale si supponga distribuita la nostra intera corda, ed essa serie si continui sino al numero n. di termini. Determineremo il primo nodo facendo

$$\frac{n^{\frac{2}{3}}L}{\infty^{\frac{2}{3}}} : \frac{L}{\infty^{\frac{2}{3}}} :: L : \frac{L}{n^{\frac{2}{3}}}$$

onde ne risulterà il quarto termine dell'analogia $\frac{L}{n^{\frac{2}{3}}}$ uguale alla distanza del primo nodo dal punto C.

Coll'analogia $\frac{n^{\frac{2}{3}}L}{\infty^{\frac{2}{3}}} : \frac{2^{\frac{2}{3}}L}{\infty^{\frac{2}{3}}} :: L : \frac{2^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}}$

si renderà nota la distanza $= \frac{2^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}}$ del secondo nodo dal punto C.

Proseguendo con tal ordine si presenterà la progressione

$$\frac{L}{n^{\frac{2}{3}}}, \frac{2^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}}, \frac{3^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}} \text{ \&c. } \frac{n^{\frac{2}{3}}L}{n^{\frac{2}{3}}} = L,$$

la quale in ciò solo discorda da quella delle parti infinitesime, che il divisore $\infty^{\frac{2}{3}}$ si cangia in $n^{\frac{2}{3}}$, e perciò quando n si accresca all'infinito, la seconda serie coincide colla prima.

Siccome la prima serie si è dedotta dal dividere per ∞ la quantità

$\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}$

$\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}} = \int q^{\frac{1}{2}}dq$, posta $q = L$; così la seconda serie può nascere, dividendo per n la stessa grandezza $\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}}$, e facendo gradatamente 1, 2, 3, 4, &c di queste parti uguali $\frac{2}{3}q^{\frac{3}{2}}$. I valori di q, che si scopriranno, saranno uguali ai termini della progressione seconda.

XXXIV. Giacché $q^{\frac{1}{2}}dq$ è proporzionale al tempicello cottante, in cui si vibrano la cordicella unisone dq, ne segue, che dividendo per n la quantità $\frac{2}{3}L^{\frac{3}{2}} = \int q^{\frac{1}{2}}dq$, io vengo a distribuire la corda in porzioni composte di un pari numero $\frac{\infty}{n}$ di elementi unisoni, le quali porzioni sono altresì unisone. Quindi le corde triangolari hanno la proprietà comune colle corde cilindriche, che i segmenti unisoni sono formati da un egual numero di elementi unisoni, e generalmente i tempi delle vibrazioni di due segmenti serbano la proporzione dei numeri degli elementi unisoni, che nei ~~predetti~~ medesimi segmenti son contenuti.

Tagliata ad arbitrio $CK = q$, il numero degli elementi unisoni contenuti ~~nella~~ nella parte $CLAL$ a quello degli elementi contenuti nella corda intera CAA sta come $q^{\frac{3}{2}} : L^{\frac{3}{2}}$, e per conseguenza il numero dei detti elementi composti nella parte LAL si riferisce a quello contenuto nella corda totale come $L^{\frac{3}{2}} - q^{\frac{3}{2}} : L^{\frac{3}{2}}$. Nella stessa proporzione si corrisponderanno i tempi delle vibrazioni

zioni del segmento $L n a$, e della corda $C a n a$, quando l'uno, e l'altra oscillano intera. Sarà $L n a$ l'ultima delle porzioni, nelle quali si può scompartire una corda, quando si vibra, se l'assissa $CK = q$ si ponga uguale ad $\frac{\overline{n-1}^{\frac{2}{3}}}{n^{\frac{2}{3}}} \cdot L$. Avremo pertanto $q^{\frac{3}{2}} = \frac{\overline{n-1}}{n} \cdot L^{\frac{3}{2}} = L^{\frac{3}{2}} - \frac{L^{\frac{3}{2}}}{n}$; e quindi i tempi delle vibrazioni della porzione $L n a$, e della corda ~~$C a n a$~~ che prima dicemmo indivisa, i quali hanno generalmente la ragione di $L^{\frac{3}{2}} - q^{\frac{3}{2}} : L^{\frac{3}{2}}$, li troveremo come $\frac{L^{\frac{3}{2}}}{n} : L^{\frac{3}{2}}$, o sia come $\frac{1}{n} : 1$, ossia come $C n a$: $C a n a$, conforme in fatti dee essere. Se la corda oscillasse distribuita nel numero n di parti, ne risulterebbero i tempi uguali.

Il segmento $L n a$ può anch'esso vibrarsi scompartito in 2, 3, 4, &c. membri unisoni, e quindi la totale serie di suoni, che può rendere, è proporzionale ai numeri 1, 2, 3, 4, &c.

Esempio V. Trovare il tempo, nel quale si vibra una corda di figura conica. =

XXXII. Passo a far parola della corda di figura conica, la quale traggono l'origine dal girare il triangolo CAa (fig. 1.) intorno all'asse CA. Pongo $CA = L$, la base circolare, il cui raggio $Aa = G^2$, $CK = q$, $KH = dq$, la massa della corda $= M$, il peso o forza, che la tende, $= P$. Dalla natura del cono abbiamo il volume $V = \frac{G^2 L}{3}$; ed inoltre l'analogia $L^2 : q^2 :: G^2 : \frac{G^2 q^2}{L^2}$, che mi dà la sezione circolare, il cui

raggio

raggio KL, $q = \frac{G^2 q^2}{L^2}$. Il perchè il volume del minimo fusto conico LnG $= \frac{G^2 q^2 dq}{L^2}$. La massa di un tale elemento si determina mediante l'analogia $\frac{G^2 L}{3} : M :: \frac{G^2 q^2 dq}{L^2} : \frac{3 M q^2 dq}{L^3}$, l'ultimo de' termini della quale si aguaglia alla massa, di cui si va in traccia.

Sia $KH = dq$ una delle infinite parti, nelle quali la corda CAnL si suppone divisa, e passando a' eguaglianze fra i raggi KL, HG, si può considerare costante la grossezza della funicella LnG, la cui lunghezza $KH = dq$. Per la legge delle corde ugualmente grosse si vibrerà essa funicella nel tempo espresso in secondi $t = \frac{c}{rb}\sqrt{\frac{3 M q^2 dq^2}{L^3 hP}}$ (34), significando giusta il consueto $\frac{c}{rb}$ il raggio diviso per la semicirconferenza circolare, ed h la lunghezza del pendolo a secondi.

Dovendo esser unisoni tutti gli elementi KH, ne' quali è scompartita la corda, la grandezza $q dq$ basta assumersi in qualità di costante. Presa pertanto la $\int q dq = \frac{q^2}{2} = \frac{L^2}{2}$ qualora $CK = q = CA = L$, e chiamando ∞ il numero infinito delle parti unisone componenti la corda, si dovrà avere $\frac{\frac{1}{2}L^2}{\infty} = q dq$. Effettuata la sostituzione nella formola (34), ci si presenterà $t = \frac{c}{\infty rb}\sqrt{\frac{3ML}{4hP}}$ (39) tempo di una vibrazione della corda CAnL, che oscillando si adatti ad una

curva

cioè formata dal numero ∞ infinito di ventri.

XXXIII. Il metodo contenuto nel numero XXIV. dello Schediasma IX. ci insegna a trovar la distanza dal punto C dei nodi, o circoli stabili, il diametro di uno dei quali sia per esempio $L \cdot d$, quando la corda oscilla divisa in un numero infinito di parti unisone.

Conciossiachè $\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}L^2$, posta $y = L$, dividasi per ∞ la grandezza $\frac{1}{2}L^2$, e formata l'equazione $\frac{\frac{1}{2}L^2}{\infty} = \frac{1}{2}y^2$, servirà questa per trovare la lontananza del primo nodo dal punto C $= y = \frac{L}{\sqrt{\infty}}$

La formola $\frac{2 \cdot \frac{1}{2}L^2}{\infty} = \frac{1}{2}y^2$ somministra la distanza del secondo nodo $y = \frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{\infty}}$

Continuando in tal guisa, ci si presenterà la progressione delle distanze dei nodi dal punto C

$$\frac{L}{\sqrt{\infty}},\ \frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{\infty}},\ \frac{L\sqrt{3}}{\sqrt{\infty}}\ \&c.\ \frac{L\sqrt{\infty}}{\sqrt{\infty}} = L$$

XXXIV. Ora egli è di uopo l'andare in traccia del tempo di una oscillazione ~~[illegible]~~ della corda intera, oppur divisa in un numero ~~[illegible]~~ qualunque di parti unisone. ~~[illegible]~~ I tempi delle oscillazioni di due corde comeche simili, e tese dalla stessa forza, e dalla stessa materia formate, che si vibrano intere, o scompartite in

parti

pari numero di membri, debbono stare fra loro come una potestà delle lunghezze delle corde predette. Dal numero II. raccogliesi, che le curve, in cui si spiegano le corde, sono espresse dalla equazione $\varphi q \cdot dq^2 = -g\frac{ddy}{y}$, e giacché nel nostro caso $\varphi q = \frac{G^2 q^2}{L^2}$, avremo $\frac{G^2 q^2 dq^2}{L^2} = -g\frac{ddy}{y}$. Ora se in due corde simili le assisse q, ed i loro elementi dq proporzionali alle lunghezze L, ~~e quindi siano [illegible] costante la massima saetta~~ debbono ad esse corrispondere ~~[illegible]~~ ordinate uguali, perché ha in entrambe le corde costante la massima saetta. La ragione si deduce da ciò, che la figura, a cui si adatta una corda sonora oscillando non può variarsi, trattandosi di corde simili, salvoché nella lunghezza, e nelle ordinate proporzionali in usi analoghi alla massima saetta; sopra ~~non dipendendo né dalla massa, né dalla grossezza, né dalla tensione, ma soltanto dalla lunghezza, e dalla massima saetta,~~ sopra di che veggasi il numero XIX.III. dello Schediasma IX. Avremo dunque nella mentovata ipotesi y, dy, ddy uguali in amendue le corde, e per conseguenza ~~[illegible]~~ costante il valore $-\frac{ddy}{y}$. Per la qual cosa assunto G^2 come L^2, $q^2 dq^2$ come L^4, ne risulta g come L^4. Ora pel citato numero II. $g = \frac{aVP}{M}$, e pel numero XXI.XII. $V = \frac{G^2 L}{3}$; dunque $g = \frac{aG^2LP}{3M}$, e quindi $a = \frac{3gM}{G^2LP}$: ma g come L^4; M come L^3, G^2 come L^2 e P si suppone costante; dunque

a

sia come L^4. E poichè per num.^{ro} XXII. dello Schediasma IX. $t = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{h}}$, si conchiuda essere t proporzionale ad L^2. Il perchè i tempi delle oscillazioni di due corde coniche simili CLnL, CAnA della stessa materia, e tese dal medesimo peso P si riferiscono in ragione dei quadrati delle lunghezze, cioè a dire come $\overline{CK}^2 : \overline{CA}^2$.

Ciò dimostrato, sia CLnL la prima delle parti minime, ed unisone, in cui supponesi divisa la corda CAnA. Stando immobile la sezione ≡LnL, mi è concesso di considerare CLnL come una corda appoggiata ad uno scannello nel punto L; e giacchè, conforme ho testè provato, $CK = \frac{L}{\sqrt{\omega}}$, ossia $\overline{CK}^2 = \frac{L^2}{\omega}$, ed il tempo di una vibrazione della corda $CLnL = \frac{c}{\omega nb}\sqrt{\frac{3ML}{4hP}}$, si verifica l'analogia

$$\overline{CK}^2 = \frac{L^2}{\omega} : \overline{CA}^2 = L^2 :: \frac{c}{\omega nb}\sqrt{\frac{3ML}{4hP}} :$$

$$\frac{c}{nb}\sqrt{\frac{3ML}{4hP}} = t$$

; il quarto termine della quale si ragguaglia al tempo d'una vibrazione della corda CAnA.

Se poi CLnL, LnG siano due infinitesime porzioni unisone, dimodochè si abbia $CH = \frac{L\sqrt{2}}{\sqrt{\omega}}$, e conseguentemente $\overline{CH}^2 = \frac{2L^2}{\omega}$, metto al confronto la corda CGnG, che viene partita in due porzioni unisone, colla corda CAnA, che oscilla altresì in

due

due membri unisoni scompartita,
e ne deduco l'analogia
$$\overline{CH}^2 = \frac{2L^2}{13} : \overline{CA}^2 = L^2 :: \frac{c}{2.26}\sqrt{\frac{3ML}{4hP}} : \frac{c}{2.26}\sqrt{\frac{3ML}{4hP}} = t$$
, il cui quarto termine pareggia il tempo di una vibrazione della corda $C a 2 e$, che si vibra divisa in due parti unisone.

Paragonando l'aggregato delle tre prime infinitesime parti unisone colla corda $C a 2 e$, che si agita in tre porzioni distribuita, trovo il tempo speso in una vibrazione dalla corda ultimamente nominata, cioè $t = \frac{c}{3.26}\sqrt{\frac{3ML}{4hP}}$.

Si inferisca la conseguenza, che qualunque sia il numero n delle parti unisone, si scoprirà sempre $t = \frac{c}{n.26}\sqrt{\frac{3ML}{4hP}}$, formola, che si accomoda a qualunque grandezza di n o finita, o infinita.

Quindi i tempi di una vibrazione della medesima corda conica, conforme che oscilla intera, o scompartita in 2, 3, 4, &c. porzioni unisone, accetteranno la ragione dei termini della progressione armonica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ &c., e perciò dalla serie aritmetica $1, 2, 3, 4$, & verranno dinotati i suoni, o i numeri delle oscillazioni fatte in pari tempo.

XXXVI. Ci si renderà facilmente manifesta la posizione dei nodi della corda $C a 2 e$, che oscilla partita nel numero n di membri. Dato principio dal punto C, piglio la serie di 1, 2, 3, 4 & parti minime, che continuo sino al

al numero n di termini, ed è la seguente

$\frac{L}{\sqrt{\infty}}, \frac{\sqrt{2}\cdot L}{\sqrt{\infty}}, \frac{\sqrt{3}\cdot L}{\sqrt{\infty}}, \frac{\sqrt{4}\cdot L}{\sqrt{\infty}}$ &c. $\frac{\sqrt{n}\cdot L}{\sqrt{\infty}}$

~~Sarà~~ Stabilisco il sito del primo nodo facendo $\frac{\sqrt{n}\cdot L}{\sqrt{\infty}} : \frac{L}{\sqrt{\infty}} :: L : \frac{L}{\sqrt{n}}$, e l'ultimo termine dell'analogia pareggia la lontananza $= \frac{L}{\sqrt{n}}$ del primo nodo dal punto C.

Col mezzo della proporzione $\frac{\sqrt{n}\cdot L}{\sqrt{\infty}} : \frac{\sqrt{2}\cdot L}{\sqrt{\infty}} :: L : \frac{\sqrt{2}\cdot L}{\sqrt{n}}$ scopro la distanza $\frac{\sqrt{2}\cdot L}{\sqrt{n}}$ dal punto C del 2.do nodo.

Seguitando a battere questa strada, mi si affaccia la serie ^

^ della distanza dei nodi 1, 2, 3, 4. &c. dal punto C

$\frac{L}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{2}\cdot L}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{3}\cdot L}{\sqrt{n}}, \frac{\sqrt{4}\cdot L}{\sqrt{n}}$ &c $\frac{\sqrt{n}\cdot L}{\sqrt{n}} = L$,

la quale si cangia in quella spettante alle parti unisone infinitesime componenti la corda, quando n tanto si aumenti, che divenga $= \infty$.

In quella guisa, che la serie confacente alle parti unisone ha tratto l'origine dal partire per ∞ la grandezza $\frac{1}{2}L^2$ ~~ancora~~ $= \int q\,dq$, posta $q = L$; non altrimenti l'ultima serie può nascere dividendo per n la medesima quantità $\frac{1}{2}L^2$, e mettendo ordinatamente $= \frac{1}{2}q^2$ ~~l'equazione~~ il provenienti, che ne risulta, ~~scoperto~~ moltiplicato per 1, 2, 3, 4, &c.. I valori di q, che si deducono da tale equazione, si agguagliano ai termini dell'ultima progressione.

XXXVII. Conciossiaché per la formola

(38)

(34) $t = \frac{c}{n b}\int q\,dq \sqrt{\frac{3M}{L^3 h P}}$ la quantità $q\,dq$ stia in ragione del tempicello costante, in cui si vibrano le fimicelle unisone, la lunghezza delle quali = dq, addiviene, che partendo per n la grandezza $\frac{1}{2}L^2 = \int q\,dq$ posta $q = L$, distribuisco la corda in porzioni unisone composte di un egual numero $\frac{cs}{n}$ di elementi unisoni. Per la qual cosa la proprietà, che i segmenti unisoni siano formati da un pari numero di elementi unisoni, è comune alle corde coniche, cilindriche, triangolari, a cui si debbono aggiungere quelle dell'Esempio I., la cui grossezza $\varphi x = \frac{G^2 K^4}{\overline{K+x}^4}$. In ciascuna di queste corde i tempi delle vibrazioni di due segmenti presi ad arbitrio accettano la ragione dei numeri degli elementi unisoni, che in essi segmenti sono compresi.

Segnata a piacimento $CK = q$, il numero degli elementi unisoni contenuti nella parte $CLnL$, si riferisca a quello degli elementi unisoni contenuti nella corda intera $CAna$ in proporzione di $q^2 : L^2$; e conseguentemente il numero dei mentovati elementi compresi nel residuo Lna corrisponde a quello contenuto nella corda totale come $L^2 - q^2 : L^2$. Nella medesima proporzione si riguardano i tempi delle oscillazioni della porzione Lna, e della

Schediasma X.

Della corda $L a n a$, qualora l'una e l'altra si vibrano intere, o pure divise in pari numero di parti.

Sarà $L n a$ l'ultima delle porzioni unisone, il cui numero n, nelle quali si intende scompartita la corda $Lana$, se l'assissa $CK = y$ si ponga uguale a $\frac{\sqrt{n-1} \cdot L}{\sqrt{n}}$, onde ne risulti $y^2 = \frac{n-1}{n} \cdot L^2 = L^2 - \frac{L^2}{n}$. I tempi delle oscillazioni della parte Lna, e della corda $Lana$, che si vibra indivisa, i quali stanno generalmente in ragione di $L^2 - y^2 : L^2$, li scoprirono nel nostro caso come $\frac{1}{n} : 1$; proporzione, che effettivamente loro compete.

Delle Vibrazioni della Corda di inuguale grossezza, la quale non viene regolata da una legge costante, e con questa occasione del Suono falso.

XXXVII. Non mi è giammai pervenuto a notizia, che da verun Autore sia stata posta in chiaro la vera ed intima proprietà, mercè la quale parecchi suoni si giudicano falsi dal nostro orecchio. Si potrebbe sospettare, che il suono falso traesse l'origine da un aggregato di suoni dissonanti: ma fatta la riflessione, che con parallelepipedi, o con cilindri si formano dagli stromenti grati all'udito, e che per esempio un cilindro renda un aggregato di suoni assai dissonanti,

si

si cavi la consequenza, che da una tale unione di suoni non dipenda la natura del suono falso. I suoni di un cilindro, come vedremo nel seguente Schediasma XI., si accostano alle ragioni 9 : 25, 9 : 49, 9 : 81, 9 : 121, 9 : 169 &c., dalle quali non calano i suoni acuti, salvochè per la metà crescente del comma 80 : 81. E qui, giacchè mi si presenta l'occasione, non voglio lasciar di riflettere quanto sia falso il supposto di M. Rameau, che tutti i corpi sonori producano l'aggregato di suoni espresso dai numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, e quanto conseguentemente sia debole il fondamento, sul quale appoggia l'accordo per terza maggiore. Quantunque i suoni tutti di un cilindro sian mutuamente dissonanti, nulladimeno ogni suono è giusto, e giusta parimente la loro unione, nella quale il suono più grave predomina, e copre gli altri.

XXXVIII. Egli è necessario adunque da sorgente diversa derivare l'origine del suono falso. Maneggiando il problema delle vibrazioni delle corde inegualmente grosse, mi è riuscito di scoprire l'importante verità, che si danno moltissime corde, che non possono vibrarsi colla legge di un pendolo a cicloide, impiegando nelle successive vibrazioni sempre un tempo costante. Tali sono quelle corde, la cui varia grossezza da una sola legge

non

Schediasma X.

non vien sregolata. Una di sì fatta corda pertanto non può vibrarsi isocrona, ma dentro certi limiti fa transito dal grave all'acuto, e dall'acuto al grave. Se una corda può vibrarsi colla legge di un pendolo cicloidale, prende una di quelle figure, che equilibrate soglio chiamare; perchè le forze accelerano, o ritardano soltanto quella particola, a cui sono applicate, nè si dà comunicazione di moto da una particola all'altra. Le corde inegualmente grosse, di cui parliamo, sono sempre sbilanciate, ed il moto passa continuamente da particola a particola, senza che possano giammai pervenire ad una equilibrata figura. Da ciò procede l'ineguale durata delle loro vibrazioni, e l'incerto suono che rendono. Con una corda, il cui suono è giusto, se tento di porre all'unisono un'altra, che produca un suon falso; e tali sono frequentemente le corde di minugia, non otterrò mai perfettamente l'intento, sembrandomi la seconda ora unisona colla prima, ora più grave, ed ora più acuta; segno evidente del suo tuono incostante. Or ecco messa in chiaro l'idea giusta del suono falso. Qual corpo sonoro produca un suono falso, le cui vibrazioni non sono isocrone, ma stando fra determinati confini, con una perpetua vicenda passano dal grave all'acuto, e dall'acuto al grave.

Schediasma X.

XXXIX. Non voglio tralasciar di notare, sembrarmi probabilissimo, che l'avere, o il non avere orecchio musico dipenda dalla struttura del nervo uditorio. Se un tal nervo è capace di oscillazioni isocrone, si vibra perfettamente unisono ai suoni esteriori, e comunicandoli l'anima con precisione, gli paragona insieme, ed intende l'armonia con diletto. Ma se il nervo mentovato non impiega nel fare le sue vibrazioni un tempo costante, in cambio di oscillare esattamente unisono ai suoni esterni, porta all'anima dei suoni falsi, la quale perciò forma un'idea imperfetta dell'armonia, e poco, o niun piacer ne raccoglie. Si conferma via più la mia congettura osservando, che se qualcuno sfornito di orecchio musico vuol cantare all'unisono con un altro, non intona mai giusto; perchè le voci del compagno vengono con alterazione trasferite all'anima dal sensorio.

XXXX. L'idea stabilita del suono falso riceverà maggior lume dal problema, che tratta delle vibrazioni delle corde, la cui ineguale grossezza non soggiace alla medesima legge. Non possono tali corde accomodarsi giammai ad una figura equilibrata. Sia per esempio la corda formata da due porzioni, la cui grossezza ricavano due leggi diverse; potrà bene ciascuna parte ripiegarsi in una curva equilibrata; ma in quel punto, nel

quale

quale si fa transito da una legge all'
altra, accaderà sbilanciamento, e suc=
cedendo innumerabili, e continue late=
rali comunicazioni di moto da particola
a particola della corda, non giungerà
essa mai a ricevere una figura bilan=
ciata compiutamente, ogni elemento
della quale si vibri nel medesimo tempo.
Ne seguirebbe maggiore contrasto, se
da molte leggi dipendesse la grossezza
della corda. S'inferisce, che le varie
particole della nostra corda si vibrano
in tempi diversi, e che essendo sempre
di indole differente la curva, a cui si
conforma, non sono nemmeno costanti
i tempi delle vibrazioni della stessa
particola. Quindi ne risulta un suono
incerto, e falso, che intonar non si può
e che riesce sommamente fastidioso
all'orecchio.

XXXXI. Il ridurre a computo le
velocità delle particole di sì fatta corda,
io lo giudico un problema intrattabile.
Sia f la forza applicata ad una parti=
cola, s'io farò $f\,dt$ uguale all'incre=
mento di quantità di moto operato
direttamente in essa particola, ed al=
tresì agli incrementi, che a cagione
della comunicazione del moto succe=
dono nelle altre particole, sono con=
dotto sicuramente al paralogismo da
questa formola, la quale non si avvera
salvochè nell'ipotesi, che tutte le par=
ticole si muovano con pari celerità.
La formola $f\,dt$ uguale alle aumenta=

zioni

zioni di forza viva cagionata in tutta la particola è giusta, ma per usarla farebbe di uopo sapere la legge della velocità di essa particola, e qual porzione dell'azione fe's s'impieghi ad accrescere la forza viva di ciascuna particola. Quello, che s'è detto di un'azione si applichi all'altra tutta, e si conchiuda, che la forza viva di una particola non dipende solo dall'azione della forza, che direttamente la spinge, ma ancora mediante la comunicazione del moto dalle azioni della forza, che sollecitano le rimanenti particole. Se nel principio del moto la corda è ripiegata in una figura bilanciata, l'equazione di tale curva mi rende nota la forza, che spingono i punti della corda, e poichè nei susseguenti istanti le curve sono sempre analoghe alla primitiva, conosco i valori della forza in ciascuna curva, ed è in mia potestà il calcolare la velocità di qualsivoglia particola, ed il tempo di una sua vibrazione. Ma se la corda è incapace di accomodarsi a curva equilibrata, sappiasi l'equazione della curva, a cui s'adatta nel cominciamento del moto, e per conseguenza siano conosciute la forza, che sollecitano la particola della corda; quale frutto ne raccoglierò da tal cognizione? Sendo nei susseguenti istanti le curve di indole differentissima e ignota, rimango all'oscuro dei valori della forza, nè mi è concesso di computare la velocità, e i tempi delle vibrazioni. Non ho voluto

risparmiare

risparmiava parole; onde mettere in vista le insuperabili difficoltà, che si incontrano maneggiando il problema delle vibrazioni delle corde, la cui ineguale grossezza non viene regolata da legge costante. Si contenti dunque chi legge, ch'io procuri di rischiarare questo argomento con un esempio, che fra tutti è il più semplice:

Esempio VI.

Delle vibrazioni delle corde, le cui due metà siano di ineguale grossezza.

XXXXII. La metà $A'C$ (Fig. 14.) della corda $A'A$ sia più sottile, ovvero meno densa dell'altra metà CA. Nel primo istante del movimento sia essa ripiegata nella curva $A7A'$, la cui equazione $x = L \cdot \frac{\text{Arco Rag. } c \text{ Seno } y}{2b}$, poste $AA' = L$, $C7 = c$, $A7 = x$, $7K = y$, ed essendo b il quadrante circolare del raggio c. Le due metà della curva sono bilanciate, e la stessa proprietà comparerebbe alla curva intera $A7A'$, se le sue due metà fossero ugualmente grosse. Veggasi lo Schadiasma IV. Le forze sollecitanti i punti K, H si riferiscono nella proporzione delle ordinate $7K$, LH, e le forze accelleratrici accettano la ragione composta, diretta delle predette ordinate, ed inversa delle grossezze delle semicorde $A'7$, $A7$. Segno varj elementi della corda di pari lunghezza $7G$, GH &c. $7e$, eD &c. essendo l'ordinata $C7$ comune ai due

elementi

elementi ZE, ZG, le forze acceleratrici stanno in ragione reciproca della grossezza di essi elementi. Se dunque non fossero connessi nel punto Z, l'elemento ZE si muoverebbe più celeramente del ZG. La loro unione fassi, che il punto Z ad entrambi comune debba acquistare una media velocità; il che s'ottiene mediante la comunicazione del moto dall'elemento EZ al ZG. Ritardato in tal guisa l'elemento EZ, ritarda esso l'elemento DE, e viene da questo accelerato, e l'accelerazione si comunica agli elementi ZG, GH &c., ed il ritardamento agli elementi DK &c. Si proseguisca il discorso con questo metodo, e si comprenderà, che rispettivamente a quelle velocità, che avrebbero acquistato i punti della semicorda A'Z, se ancora la ZA fosse della stessa grossezza, i nominati punti sono tanto più ritardati, quanto maggiormente si discostano dal punto A', e si accostano al punto Z. In riguardo poi alla velocità, che compererebbero ai punti della semicorda ZA, se altresì la ZA' avesse con essa comune la grossezza, i predetti punti si vanno sempre più accelerando, secondochè si allontanano dal punto A, e si ~~accostano~~ avvicinano al punto Z. Da ciò si raccoglie, che quando il punto Z sarà pervenuto in C, la semicorda A'Z avrà ~~[illegible]~~ passato l'asse A'CA, e la semicorda AZ ad esso non sarà giunta per anche, dimodochè la corda avrà presa la fig. 15. A'MCNA.

La nostra corda sia tutta discesa

soNo

sotto l'asse A'CA, conformandosi alla curva A'fA (Fig. 16.), e seguiti ancora a muoversi per la direzione Cf. L'elemento fe verrebbe più ritardato dall'elemento fg, se non fossero congiunti nel punto f. In tale circostanza pertanto succede tutto il contrario di quello, che abbiamo notato avvenire negli elementi 7e, 7G (Fig. 14.), e l'elemento fg (Fig. 16.) fa che meno si ritardi l'elemento fe. Con un raziocinio analogo a quello, che ho adattato alla figura 14., si concluderà, che mediante la comunicazione del moto, la particola fe, ed &c. vengono tanto meno ritardate, quanto cresce la loro distanza dal punto A'; e le particole fg, gh &c. ricevono maggiore ritardamento, quanto più si allontanano dal punto A. Quindi si inferisce, che gli elementi della corda si vibreranno in tempi diversi, e che procedendo da A' verso A, giungeranno allo stato di quiete gradatamente sempre più tardi, rendendo suoni, che dentro certi limiti passeranno dall'acuto al grave.

Si aggiunga, che essendo la curva A'MCNA (Fig. 15.), A'fA (Fig. 16.) &c. di indole sempre diversa a cagione della continua comunicazioni laterali di moto, nè ritornando mai la corda a ripigliare la primitiva figura A'7A (Fig. 14.), addiviene che la stessa particola non si vibri in tempo costante, ma fra determinati confini faccia transito dall'acuto al grave, o

dal

Schadiasma X.

dal grave all'acuto. Il perchè e le particole diverse, e la stessa particola producono un suono incerto, che intonar non si può, e merita il nome di falso. La causa di questi effetti dipende dal diverso valore della forza accelerattrici degli elementi Ↄe, ↃG, il quale fa sì, che non cessi mai la communicazione di moto, e che per consequenza la corda non possa ottenere di accomodarsi ad una figura del genere della bilanciate, alle quali soltanto compete l'isocronismo.

Nell'oscurità della materia, che ho per le mani, basti questo saggio, il quale per altro sembrami, che rischiari quanto basta la natura del Suono falso.

Schediasma XI.

Delle vibrazioni sonore dei Cilindri

Dimostrazione

Di parecchj Cilindri di metallo, o di vetro si formano certi Stromenti, che riescono grati all'orecchio. Di tali composizioni istruzione si è l'indagare le oscillazioni, le quali, come vedremo, vengono regolate da leggi diversissime da quelle delle corde sonore. *Dei cominciar passo passo si rende necessaria la soluzione dimostrazione del seguente teorema:

Lemma

Se nella distendendosi le lunghezze inferiori di due cilindri, si allungano solamente le superiori, o al rovescio, e ciò per opera di due forze [illegible] perpendicolari alle basi dei cilindri; ed eguali applicate [illegible] a punti analoghi de' loro diametri situati ne' piani, in cui giacciono le mentovate opposte lunghezze, gli allungamenti corrispondenti a punti analoghi dei diametri stanno in ragione composta, diretta delle lunghezze dei cilindri, ed inversa della rigidità della materia, onde sono formati, e delle loro basi; o sia dei quadrati dei loro diametri.

Siano (fig. 11) due cilindri OV, ov, i quali si trovino in tali circostanze, che nella dilatandosi le lunghezze inferiori VM, vm, si distendano a grado a grado le superiori, di modo che gli allungamenti si eguaglino alle ordinate dei triangoli MOL, mol. Si fingano totalmente inflessibili le loro basi MGOI, mgoi, e suppongasi, che i mentovati allungamenti sieno cagionati da due forze rispettivamente eguali, con direzione normale alle dette basi applicate per esempio alle estremità O, o dei diametri MO

* Quantunque io abbia preso l'essenziale di questa soluzione dalla Appendice sopra le corde elastiche aggiunta dal dottissimo Sig.r Leonardo Eulero alla sua profonda Opera, Methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes; nulladimeno non isdegnino di leggerla i Matematici, si perchè ho procurato di dilucidare la materia per se stessa recondissima, si perchè m'è riuscito di trovarvi per entro qualche non dispregevole scoperta, e di notare alcun altro piccolo neo, che a dover opportunamente seguendo, nelle speculazioni per altro sublimi del dottissimo Autore.

MO, mo collocati ne' piani VL, vl: dico
che le distensioni OL, ol corrispondenti
ai punti analoghi O, o serbano la propor=
zione composta, diretta delle lunghezze SO,
so dei cilindri, e reciproca delle rigidità
della materia, onde constano, e dei quadrati
dei loro diametri.

Si seguino prima le linee finite MP, mp, indi
le rispettive PR, pr proporzionali ai diame=
tri MO, mo, e di tratto parallele alle lunghezze
VM, vm si tirino le linee KZ, NX; kz, nx.
Per tali coppie di linee passino dei piani nor=
mali ai piani VL, vl, e questi segne=
ranno due parallelepipedi, le cui lunghezze
KP, kp, e le basi GH, gh. Essendo
MO : MP :: mo : mp, MO : MP :: OL : PZ.
mo : mp :: ol : pz, ne risulta parimente
l'analogia OL : PZ :: ol : pz, la quale
ci insegna, che gli allungamenti dei due
cilindri in siti analoghi abbracciano la me=
desima proporzione. Vengano le distensio=
ni PZ, pz direttamente effettuate nei
solidi KR, kr da due forze momenti eguali.
Ho ~~altrove~~ dimostrato nel numero IV. dello Schediasma I., che gli allungamenti
prodotti da forze rispettivamente eguali in due
corde elastiche, che non siano tese, stanno come
la loro lunghezze diretta per il prodotto della
rigidità della materia, onde sono composte,
nella ~~quadrato dei~~ loro ~~diametri~~ basi: e le dimostra=
zioni ivi addotte, che non ripeto presente=
mente, s'adattano ugualmente ai parallele=
pipedi KR, ks. Per la qual cosa ~~[illegible]~~ le disten=
sioni PZ, pz serbavano la nominata
relazione. Ma le basi GH, gh, che sono
porzioni simili delle basi circolari dei ci=
lindri, si riferiscono nella ragione dei quadrati
dei diametri MO, mo; dunque le distensioni
PZ, pz dei solidi KR, ks, come altresì quelle
di tutte l'altre coppie di solidi simili fondati in basi, o simil=
mente

mente situati, che in pari numero congiongono i vicini cilindri, avrebbero la proporzione delle lunghezze ΦM, ovvero divise per il prodotto della rigidità della materia nel quadrato dei diametri dei cilindri. Si cavi la conseguenza, che in qualunque pajo di parallelepipedi collocati per siti analoghi, gli allungamenti (che si riguardano dall'ordine nella mentovata ragione) sono cagionati da due forze eguali.

Si restituiscano ora i cilindri per gli spazietti LO, lg parti infinitesime simili degli spazj OL, ol, ed agevole riuscirà la riflessione ancora

$$OL : \Phi Z :: QL : YZ :: ol : \phi z :: ql : yz$$

e che però gli spazietti analoghi QL, ql; YZ, yz si riferiscono nella stabilita ragione, nella quale pure si riguardavano le variazioni minimissime delle forze a coppia a coppia eguali applicate ai punti analoghi Z, z; L, l ~~Lo~~ ... LO nello rapporto parimente accettavano gli aggregati di queste variazioni. Se tolte di mezzo tali forze infinite di numero, io voglio collocare nei siti L, l due forze equipollenti per le dimensioni OL, ol, egli è d'uopo, che alla somma delle variazioni delle forze levate si eguagli la unica variazione della forza sostituita. Quindi le variazioni delle due forze surrogate dovranno ~~stare~~ come QL : ql. Ma le dette forze reggiscono per gli spazj QL, ql; dunque le variazioni sono come gli spazj, per cui scorrono le due forze: il che non può verificarsi se non nel caso, che siano eguali esse forze. Se due forze eguali per tanto normali alle basi dei cilindri Ol, ol, ed applicate ai punti analoghi O, o dei diametri MO, mo situati nei piani VL, vl fanno equilibrio colla forza elastica

dei

Schediasma XI.

* Fingasi collocata in A una forza equipollente a tutte quelle, che come vedremo sono parallele alle ordinate MC, le quali fanno equilibrio coll' elaterio LV. Si io risolverò questa forza in due, una parallela, e l'altra perpendicolare alla direzione MV di uno cilindro, troverò la prima minima relativamente alla seconda, e ciò perchè discostandosi infinitamente poco la curva AVMD dalla linea retta AB, la direzione della forza, che si risolve, è pressochè normale alla linea MV. La forza menomissima parallela ad MV allunga tutto il cilindretto MS in LV egualmente, e la perpendicolare rispettivamente infinita ripiega il detto cilindro, e cagiona la distensioni uguali dalla ordinata del triangolo MOL. Ecco adunque, che nascendo l'allungamento comune a tutto il cilindro sicome operato da una forza adeguatamente uguale a nulla, mi è concesso il supporre, che la lunghezza inferiore MV ritenga la sua naturale misura.

dei cilindri stessi, le corrispondenti distensioni OL, ed devono notare la ragione composta diretta delle lunghezze SO, so dei cilindri, ed inversa delle rigidità della materia da cui sono formati, e dei quadrati de' loro diametri.

Problema I

Determinare la forza, la quale supposta applicata per una data direzione in un sito determinato sia equipollente alla forza elastica d'una menoma porzione di cilindro infinitamente poco incurvato.

AVMD (fig. 14) la curva di menoma piegatura, a cui ribrandosi si sia adattato un cilindro, ed AC, CM siano le coordinate l'una all'altra normali. ~~[illegible]~~ la porzione elementare LV del detto cilindro pochissimo incurvata MV, venga combaciata dal circolo MV descritto col raggio infinitamente lungo DM. Alla linea DVS per il punto M conduco parallela la linea MO. Dovendosi supporre, che nel ripiegarsi la lunghezza inferiore MV del mentovato cilindretto non abbia sofferta alterazione, si sarà egli superiormente dilatato per OL. * ~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

Chiamo la lunghezza del cilindro MV = ds, il raggio

il raggio osculatore $DM = R$, il diametro di esso cilindro $ML = D$, la rigidezza della materia, che lo compone $= r$. La similitudine dei triangoli DMV, MLO ci somministrano l'analogia

$$DM : MV :: ML : LO$$
$$R : ds :: D : \frac{D\,ds}{R},$$

da cui si ricava $LO = \frac{D\,ds}{R}$. Una forza costante 1, che agisca per la direzione OL, allungherebbe il cilindro, conforme ho dimostrato nel precedente Lemma per lo spazio proporzionale a $\frac{ds}{rD^2}$, il quale sta in ragione composta, diretta della lunghezza del cilindro, ed inversa del quadrato del diametro, o sia base del cilindro, e della rigidità della materia, dalla quale è formato. Essendo pertanto nello stesso cilindro le distensioni come le forze tiranti, che le cagionano, se l'allungamento come $\frac{ds}{rD^2}$ è prodotto dalla forza 1, ne segue, che per ottenere la dilatazione $LO = \frac{D.\,ds}{R}$ vi vorrà la forza proporzionale a $\frac{D^3 r}{R}$.

Si restituisca il nostro cilindro per lo spazietto LQ, porzione inassegnabile dello spazio LO, ed il raggio osculatore MD si allunghi, e divenga eguale ad $MG = R + dR$. Troveremo la linea $QO = \frac{D.\,ds}{R + dR}$, la quale sottratta da $LO = \frac{D.\,ds}{R}$ ci dà $LQ = \frac{D\,dR\,ds}{R^2}$. Quindi l'azione della forza proporzionale a $\frac{D^3 r}{R}$, che per lo spazio LQ si conserva costante, sarà come $\frac{D^4 r\,dR\,ds}{R^3}$.

scioglio

Schadiasma XI.

Taglio $MT = \frac{1}{R}$, e per il punto T conduco TR parallela ad LQ. Dalla somiglianza dei triangoletti MLQ, MTR deduco l'analogia

$$ML : LQ :: MT : TR$$

$$D : \frac{D\,dR\,ds}{R^2} :: \frac{1}{R} : \frac{dR\,ds}{R^3},$$

che mi addita il valore di $TR = \frac{dR\,ds}{R^3}$.

Voglia collocarsi in T colla direzione RT una forza equipollente a quella, che si è applicata in L, e che per conseguenza faccia equilibrio colla elasticità del cilindro LV. Sa le due forze in L, ed in T hanno ad essere equipollenti, le loro variazioni per gli spazj LQ, TR devono essere uguali. Si conosca, che diviso la variazione della prima forza, per forza proporzionale a $\frac{D^4 r\,dR\,ds}{R^3}$ per lo spazietto $TR = \frac{dR\,ds}{R^3}$, per cui rimarrà la seconda, ne proverrà la grandezza della forza stessa applicata nel sito T proporzionale a $D^4 r$, cioè a dire in ragione composta del quadrato-quadrato del diametro del cilindro di fibra, e della rigidità della materia, della quale è formato.

Sia M la massa di tutto il cilindro, L la sua lunghezza, g la sua gravità specifica, o densità, e la quantità $\frac{M}{gL}$ esprimerà la base del cilindro, la quale sta come il quadrato D^2 del diametro. Sostituendo in vece di D^4 la grandezza proporzionale $\frac{M^2}{g^2 L^2}$, avremo stare come $\frac{M^2 r}{g^2 L^2}$ quella forza applicata alla distanza $MT = \frac{1}{R}$ dal punto M colla direzione RT, che forma equilibrio colla elasticità del cilindretto LV

la cui

è cui minima curvatura $= \frac{1}{R}$. Nominata C la detta forza, avremo
$$\frac{K r M^2}{g^2 L^2} = C,$$
ed il coefficiente K sarà costante in tutti i cilindri.

* ~~[illegible]~~

Trovare ~~per~~ col mezzo degli esperimenti il valore della forza C.

V. Alla muraglia ~~[illegible]~~ perpendicolare BK sia immobilmente raccomandato il cilindro AVMT il quale prima di essere incurvato toccava la positura HT a squadra della linea TB. Avverto, che la linea HT tocca la curva AVMT nel punto T. Una forza P applicata al punto estremo A con direzione sempre parallela ad TB abbia ripiegato il cilindro nella curva AVMT, e formi con esso equilibrio, e con tutti i suoi elementi. Per il punto A si tiri AB parallela ad HT, e dal punto M si lasci cadere l'ordinata MC perpendicolare ad AB. Si taglia MC = AC, e si conduca la diagonale AM. Chiamo AB = a, BT = b, AC = x, CM = y, e giacché il cilindretto LV sta in equilibrio colla forza P, se supporremo, che invariata rimanga la curvatura del rimanente del cilindro, e che solamente il cilindretto LV riceva una minima azione, a questa dovrà essere uguale la reazione della forza P. In cambio della elasticità del cilindro LV si potrà sostituire la forza equivalente C applicata in T, ovvero in R, la quale agisca per lo spazietto RT. Il punto K della linea MR descriverà l'archetto RT, ed i raggi MI = MR, ed MA seguiranno gli archi IR, AZ simili al RT. Dal punto Z si cali ZN normale ad AB. Essendo la direzione della forza

P

* Scolio

IV. Se col metodo di sopra tenuto relativamente ai cilindri avessi cercato il valore della forza C nelle lamine elastiche, mi sarebbe riuscito di trovarla proporzionale in ragione composta della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del cubo della sua grossezza. Alla forza C il sig. Eulero dà il titolo di elasticità assoluta della lamina, e senza dimostrarlo l'asserisce proporzionale al prodotto della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del quadrato della grossezza. Questo sbaglio influisce nella legge dei tempi delle vibrazioni delle lamine elastiche dal medesimo determinata, la quale dal nostro Autore, la quale non corrisponde ai fenomeni, salvo che nella circostanza, che le diverse lamine siano di pari grossezza.

P perpendicolare ad AB, vengasi alla forza per lo spazio NZ, mentre la forza Q agisce per lo spazio RT. Avremo adunque per le leggi dell'equilibrio $P . \overline{NZ} = Q . RT$. Essendo simili i triangoli MAC, AZN, scopriremo essere MA : AZ :: AC : NZ, ma per la somiglianza dei settori MAZ, MDQ, MA : AZ :: MD : DQ; dunque AC : NZ :: MD : DQ, e giacchè per la costruzione $AC = MD = x$, sarà parimenti $NZ = DQ$. Avremo pertanto $P . \overline{DQ} = Q . \overline{RT}$, e surrogando in luogo degli archetti DQ, RT i raggi proporzionali $MD = x$, $MR = \frac{1}{R}$, $Px = \frac{Q}{R}$

VI. Chiamano i Meccanici la quantità Px il momento della forza P relativamente al punto M, e dovendo questa far equilibrio colla elasticità del cilindro, stabiliscono l'equazione $Px = \frac{Q}{R}$. Ho stimato opportuna cosa rischiarare la materia deducendo la nostra formula dalla eguaglianza delle azioni momentanee, che mutuamente si impediscono, nella quale consiste il vero fondamento dell'equilibrio. Si rileva il progresso del mio raziocinio, che le grandezze Px, $\frac{Q}{R}$ sono proporzionali alle azioni eguali e contrarie, l'una delle quali nasce dall'atto di impedimento, della forza P, e della elasticità del cilindro LV. Quindi siccome rettamente si nomina Px il momento della forza P, così $\frac{Q}{R}$ si deve appellare il momento della forza elastica del cilindretto LV, la cui curvatura $\frac{1}{R}$: e per questa parola momento altro non si deve intendere, salvo che la misura delle virtuali infinitesime azioni eguali, e

contrarie

costante, o quantità ad essa proporzionali.

VII. Dopo questa forse non inutile digressione torno in carriera, e ripigliata per mano l'equazione $px = \frac{c}{R}$, ovvero, che poco sopra assumemmo costante l'elemento dx delle ascisse, abbiamo il raggio osculatore $R = \frac{ds^3}{-dx\,ddy} = \frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$.

Ponendo in opera un tal valore, sorge

$$px = -\frac{c\,dx\,ddy}{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}, \text{ o sia}$$

$$px\,dx = -\frac{c\,dx^2\,ddy}{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}$$, formola, che riceve la seguente integrazione

$$p.\overline{\tfrac{1}{2}x^2+f} = -\frac{c\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$, la quale maneggiata mi dà $dy = \frac{-p\,dx.\overline{\frac{1}{2}x^2+f}}{\sqrt{c^2-p^2.\overline{\frac{1}{2}x^2+f}^2}}$.

Si determina la costante f riflettendo, che nel sito D la tangente HD è parallela all'ascissa AB, laonde $\frac{dy}{dx} = 0$, e perciò $\frac{1}{2}x^2+f = 0$, ovvero $f = -\frac{1}{2}x^2$. Ma in questo caso $x = AB = a$; dunque $f = -\frac{1}{2}a^2$. Fatto uso di un tal valore, ed adempiuti i necessarj calcoli, ci si presenterà

$$dy = \frac{\overline{a^2-x^2}.dx}{\sqrt{\frac{4c^2}{p^2}-a^4+2a^2x^2-x^4}}.$$

Si adatti alla estremità A del cilindro AUMD una forza, o peso p assai piccolo relativamente alla forza c, di modo che il cilindro stesso si ripieghi per una saetta DB pochissimamente sensibile, ma che però possa accuratamente misurarsi. In sì fatta ipotesi la quantità $\frac{4c^2}{p^2}$ sarà talmente grande, che si potrà in riguardo alla pratica trascurare la grandezza $-a^4+2a^2x^2-x^4$. Avremo per tanto $dy =$

Schediasma XI.

$dy = \frac{(a^2 - x^2)\, dx}{\frac{2e}{p}}$, e integrando

$y = p \cdot \frac{a^2x - \frac{1}{3}x^3}{2e}$. Ma quando $x = a$, $y = b$; dunque $b = \frac{pa^3}{3e}$, e finalmente $e = \frac{pa^3}{3b}$, valore della forza e, che non si discosterà dal vero sensibilmente, purchè la curvatura del cilindro sia piccolissima.

Corollario

VIII. Avendo dimostrato essere e come rD^4, sarà per conseguenza rD^4 come $\frac{pa^3}{3b}$, ed r come $\frac{pa^3}{3bD^4} = \frac{e}{D^4}$. Col mezzo dunque della pu nostra esperienza si può scoprire la proporzione fra le rigidità delle materie onde sono composti i cilindri. Stabilirò in progresso, al numero XXV. un altro canone egualmente semplice, che serve a determinare la detta proporzione.

* ~~Problema III~~

Determinare l'equazione della curva, a cui si adatta un cilindro, che si vibra.

IX. Tenga il cilindro (fig. 39.) potenza di vibrarsi la posizione rettilinea ACB, e indi poscia in oscillazione si adatti alla curva $aCcPb$, la quale si discosti dalla linea retta ACB per minimi spazj. Sia la lunghezza del cilindro acb, ovvero $ACB = L$, la sua massa $= M$, il raggio osculatore in $M = R$, il momento della elasticità del cilindro nel sito medesimo $= \frac{e}{R}$. Si chiami inoltre $Aa = b$; $AP = aM = x$; $PM = y$. Effettuando il nostro cilindro nel tempo stesso le sue isocrone vibrazioni più o meno estese, deve necessariamente oscillare colla legge di un pendolo a cicloide. Sia f la lunghezza del pendolo

* Scolio

IX Nella formola $dy = \frac{(a^2-x^2)\, dx}{\sqrt{\frac{4e^2}{p^2} - a^4 + 2a^2x^2 - x^4}}$ si faccia $\frac{2e}{p} = c^2 - a^2$, e conseguentemente $\frac{4e^2}{p^2} = c^4 - 2c^2a^2 + a^4$. Supponendosi $\frac{2e}{p}$ una quantità assai grande relativamente ad x, e ad a, sarà parimente tale la quantità c, come agevolmente raccogliesi dalla equazione assunta $\frac{2e}{p} = c^2 - a^2$. Sostituito in cambio di $\frac{2e}{p}$ il suo valore troveremo

$$dy = \frac{(a^2-x^2)\, dx}{\sqrt{c^4 - 2c^2a^2 + 2a^2x^2 - x^4}}$$

Se nel denominatore io trascuro i soli due termini $2a^2x^2 - x^4$ la cui somma è piccolissima non solo in riguardo a c^4 ma ancora per rapporto a $-2c^2a^2$, ne risulterà la formola $dy = \frac{(a^2-x^2)\, dx}{\sqrt{c^4-2c^2a^2}}$, che si adegua alla seguente $dy = \frac{(a^2-x^2)\, dx}{c^2-a^2} = \frac{(a^2-x^2)\, dx}{\frac{2e}{p}}$, da cui ricavo $e = \frac{pa^3}{3b}$. Ma se io trascurando altresì il termine $-2c^2a^2$, ho l'equazione

dy —

rendolo duplice rinvono, e giacchè questo ~~quando~~ sempre
gli resta da scovrarsi lo spazio $MD = u$, ri-
una accrescimento dalla forza accelaratrice $\frac{y}{f}$,
tale sarà altresì la forza accelaratrice del
cilindro nel sito M. La massa di un ele-
mento di esso cilindro, la cui lunghezza
dx, si eguaglia ad $\frac{Mdx}{L}$, la quale
moltiplicata per $\frac{y}{f}$, ci dà la forza sollecitante il dt. elemento collocato in M
$= \frac{Mydx}{Lf}$. Il cilindro dopo compiuta
una oscillazione si trovi nella posizione
aCcDb, e se in tale istante a tutti i
punti di esso cilindro si applicheranno le
convenienti forze $\frac{Mydx}{Lf}$ con direzioni
contraria per esempio MH, cioè a quelle
della forza sollecitanti, non seguirà più moto,
ed il cilindro si troverà in equilibrio.
Il complesso delle forze applicate alla nuova
aM sta equilibrato colla forza elastica
del cilindro in M: ed in fatti se questa si ri-
movesse, tutta la detta forza si piegherebbero
in arco. Quindi l'aggregato dei mo-
menti della mentovate forze dare pareg-
giare il momento $\frac{e}{R}$ della forza elas-
tica nel sito M.

Nomino p la somma delle forze applicate
alla nuova am, e dp per conseguenza
sarà la forza, che tira l'elemento mn
per la direzione mh. Il momento di
una forza relativamente al punto M
mettendo $Ap = z$, si eguaglia ad $\overline{x-z} . dp$.
Per trovare la somma dei detti
momenti delle nostre forze per riguardo
al punto M, si considerino per poco il
detto punto, e l'ascissa $AD = x$ come
costanti riguardando $Ap = z$ in quan-
tità di variabile. Avremo per tanto l'
aggregato

$dy = \frac{a^2 - x^2}{c^2} . dx$, la
quale integrata ne
dà $y = \frac{a^2x - \frac{1}{3}x^3}{c^2}$.
Corrispondendo $y = b$ ad
$x = a$; avremo
$b = \frac{2a^3}{3c^2}$, e ponen-
do in luogo di c^2
il suo valore $\frac{2e + a^2}{p}$,
$3b = \frac{2a^3}{\frac{2e+a^2}{p}}$. Dal
maneggio di questa
formola si ricava
$e = \frac{pa^2 . 2a - 3b}{6b}$.
Il Sig.r Eulero asse-
gna alla forza e
un tal valore, il
quale è meno sem-
plice, e meno esatto
di quello, che da
noi è stato de-
terminato.

aggregato dei momenti rispettivamente al punto M delle forze applicate alla porzione di curva am $= xp - \int q dp$. Ma $\int q dp = qp - \int p dq$, dunque la mentovata somma $= xp - qp + \int p dq$. Giunga il punto m in M, e diverrà $q = x$, $dq = dx$. Sostituiti questi valori, troveremo la somma dei momenti per rispetto al punto M di tutte le forze applicate alla parte di cilindro aM $= \int p dx$. Ora dovendo un tale complesso agguagliare al momento $\frac{a}{R}$ della elasticità del cilindro nel sito M, siam pervenuti alla equazione $\frac{a}{R} = \int p dx$, e surrogando in vece di p la eguale grandezza $\int \frac{My dx}{Lf}$, $\frac{a}{R} = \int dx \int \frac{My dx}{Lf}$. Nel caso presente, in cui la flessione costante dx della ascissa si adegua alla elemento ds della curva, si trova essere $R = \frac{dx^2}{ddy}$, e per ciò avremo $\frac{a\,ddy}{dx^2} = \int dx \int \frac{My dx}{Lf}$. Prendendo le differenze, e avrò $\frac{a\,d^3y}{dx^2} = dx \int \frac{My dx}{Lf}$, e nuovamente differenziando,

$$a\,d^4y = \frac{My\,dx^4}{Lf},$$

equazione alla curva cercata a l c 76. Sucked

Scolio.

XI. La somma dei momenti rispettivamente al punto M delle forze applicate al rimanente del cilindro Mc c 76 deve essere uguale, e contraria alla somma dei momenti delle forze

forze applicate alla porzione aM, ed aven=
do ~~questo momento da compensare~~ e l'una,
e l'altra di queste somme deve pareggiare
il momento della elasticità del cilindro nel
sito $M = \frac{e}{R}$. Così l'elemento di cilindro
collocato in M sta in equilibrio, essendo
posto in mezzo da due aggregati di mo=
menti eguali, e contrarj. Se avessi con=
siderati i momenti delle forze applicate
alla parte di cilindro M e c P b, fatta
a riflessione essere $BP = L - x$, ed il
suo incremento $= -dx$, avrei scoperto
$$\frac{e\,ddy}{dx^2} = \int -dx \int -\frac{My\,dx}{Lf},$$ equazione,
che ci guida alla formola testé ritro
vata $e\,d^4y = \frac{My\,dx^4}{Lf}$.

La ~~formola~~ avvertenza me ne suggerisce un'altra,
cioè, che la somma dei momenti relativa=
mente ai punti estremi a, b delle forze
applicate a tutto il cilindro a e c P b in
eguagliarsi a nulla, siccome quella, che
ha da formare equilibrio colli aggregato
dei momenti delle forze applicate al rel=
ativo del cilindro, che ne due mentovati
casi pareggia il nulla. Posta adunque
$x = 0$, oppure $x = AB = L$, avremo
$$\frac{e}{R} = \frac{e\,ddy}{dx^2} = \int \pm dx \int \pm \frac{My\,dx}{Lf} = 0.$$
Si cava in conseguenza essere nulla in cias=
cheduna $\frac{1}{R}$ del cilindro nei siti a, b,
e nullo parimente il momento $\frac{e}{R}$ della
sua elasticità.

Scolio II

XIII. Le forze MH eguali, e contrarie a quelle, che
tentano di far riprovare il cilindro, e spin=
gono i punti M verso la linea retta AB, devono
nattaccare il cilindro messo nella posizione
a e c P b

Schediasma XI.

a C c 7 b totalmente immobile, ovvero che possa in esso eseguire o moto progressivo per la una o l'altra direzione Cc, cC, o moto di giramento intorno qualsivoglia punto. Questo ultimo movimento non succederà, quando ~~[illegible]~~ i momenti delle forze applicate a destra, e a sinistra di qualunque punto M siano eguali e contrari, e che per conseguenza facciano equilibrio. Non accaderà nè pure il moto progressivo, sempre s'adempia la condizione che l'aggregato delle forze tirenti il cilindro per la direzione cC pareggi quello, che il tira per la direzione contraria Cc.

Abbiamo veduto, che la somma delle forze applicate alla porzione aM si agguaglia ad $\frac{M}{2f}\int y\,dx$: ma $\int y\,dx$ denota l'area aMPA; dunque la nominata somma delle forze applicate alla parte di cilindro aM scelta ad arbitrio è sempre proporzionale alla corrispondente area aMPA. Dovendo il cilindro essere egualmente tirato per le due direzioni opposte cC, Cc, egli è di uopo, che l'area positiva aCA + b7B pareggi la negativa C7cC, di modo che facendo $x = AB = L$, si trovi $\int y\,dx = 0$.

Osserveremo in progresso, che il cilindro AB si può oscillando adattare ad infinite curve, la metà delle quali tagliano l'asse AB in un numero pari di punti, ed il rimanente in un numero impari. Le più semplici fra le dette curve si veggono espresse nelle figure 19. e 20. Pretende il Sig. Eulero, che le curve del secondo genere non servano per le vibrazioni delle lamine elastiche, ma questa sua asserzione non è conforme alla verità, potendosi anche relativamente a tali curve

Determinare

determinare le costanti aggiunte nelle integrazioni, in maniera che siano eguali i momenti delle forze a destra, ed a sinistra di un qualunque punto, e che di più ad $x = AB = L$ corrisponda $\int y\,dx = 0$. L'esperienza favorisce i miei pensamenti; imperciocchè sostenendo in bilico ed indi percuotendola una lamina con un dito, x si sente chiaro quel suono, che rende la lamina stessa, mentre si uniforma alla curva della Fig. 17, e che non viene punto disturbato dal dito, il quale tocca la lamina nel suo immobile C. Il dito applicato in C ammortisce la metà dei suoni della lamina, cioè a dire tutti quelli che essa produce, mentre si adatta alle curve del primo genere, nelle quali tutte al punto C (Fig. 18, 21, 24 ~~Fig. 19, 21~~) si riferisce la massima ordinata Cc.

x (Fig. 19, 24, 28 &c.)

Problema XIV.

Integrare la equazione $\frac{eLf}{M} d^4y = y\,dx^4$, e determinare i valori delle costanti aggiunte nelle integrazioni.

XIII. Pongasi $\frac{eLf}{M} = c^4$, onde si abbia $c^4\,d^4y = y\,dx^4$.

Il celebratissimo Sig. Eulero nel Tomo VII della Miscellanea di Berlino ci ha insegnata la generale integrazione di tali equazioni differenziali di alto grado. Col mezzo di questo metodo si trova

$$y = Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C\,\text{sen.}\,\frac{x}{c} + D\cos.\,\frac{x}{c}\ (1.)$$

in cui e dinota il numero, che ha per logaritmo l'unità nella logistica della sottotangente 1. I logaritmi posti nella suddetta logistica si chiamano naturali, o iperbolici, perchè si suole con essi esprimere la quadratura della iperbola. Il lodato

Schediasma XI.

Il lodato Autore nella sua eccellente Introduzione all'analisi degli infiniti ha computato il valore del numero e, che si suol nominare la base della ~~iperbolica~~ Logistica $= 2,7182818$. Ci ha dato pure nel luogo stesso la serie dei logaritmi iperbolici dalli 1 sino al 10. Per i computi, che siam per fare, basta il sapere, che il num.° 10 nelle Tavole ha per logaritmo 1,00000000, e nella Logistica iperbolica 2,30258509, e che nella stessa proporzione ~~vicendevole~~ si devono riferire i logaritmi dell'una, e dell'altra logistica, che corrispondono allo stesso numero. Col mezzo adunque dei logaritmi delle Tavole si potrà trovare il logaritmo iperbolico di qualunque numero. Nella sovrapposta formola sen. $\frac{x}{c}$, e cos. $\frac{x}{c}$ dinotano il seno, ed il coseno dell'arco $\frac{x}{c}$ preso nel circolo il cui raggio 1. A, B, C, D son quattro costanti introdotte nelle altrettante integrazioni, a cui è di uopo assegnare i convenienti valori.

Si prendano nella nostra equazione le prime, ed indi le seconde, le terze, e le quarte differenze, ed osservando essere Differ.za $e^{\frac{x}{c}} = \frac{1}{c} e^{\frac{x}{c}} dx$, diff.za sen. $\frac{x}{c} = \frac{dx}{c} \cos. \frac{x}{c}$, differ.za cos. $\frac{x}{c} = -\frac{dx}{c} \text{sen} \frac{x}{c}$, avremo

1.ma $dy = \frac{A}{c} e^{\frac{x}{c}} dx - \frac{B}{c} e^{-\frac{x}{c}} dx + \frac{C dx}{c} \cos. \frac{x}{c} - \frac{D dx}{c} \text{sen.} \frac{x}{c}$

2.a $ddy = \frac{A}{c^2} e^{\frac{x}{c}} dx^2 + \frac{B}{c^2} e^{-\frac{x}{c}} dx^2 - \frac{C dx^2}{c^2} \text{sen.} \frac{x}{c} - \frac{D dx^2}{c^2} \cos. \frac{x}{c}$

4.ta $d^3y = \frac{A}{c^3} e^{\frac{x}{c}} dx^3 - \frac{B}{c^3} e^{-\frac{x}{c}} dx^3 - \frac{C dx^3}{c^3} \cos. \frac{x}{c} + \frac{D dx^3}{c^3} \text{sen.} \frac{x}{c}$

5.ta $d^4y = \frac{A}{c^4} e^{\frac{x}{c}} dx^4 + \frac{B}{c^4} e^{-\frac{x}{c}} dx^4 + \frac{C dx^4}{c^4} \text{sen.} \frac{x}{c} + \frac{D dx^4}{c^4} \cos. \frac{x}{c}$

Se nella 8.va equazione sostituiremo y in cambio del suo valore $Ae^{\frac{x}{c}} + Be^{-\frac{x}{c}} + C\,\text{sen.}\frac{x}{c} + D\cos.\frac{x}{c}$ somministrato dalla equazione (1), troveremo a risorgere la equazione differenziale

$d^4y = \frac{y\,dx^4}{c^4}$.

Le seguenti notate formole ci ~~somministrano~~ guidano alla determinazione delle costanti.

In primo luogo ad $x=0$ dee corrispondere $y=b$. Essendo in tal caso $e^{\frac{x}{c}}=1$, $e^{-\frac{x}{c}}=1$, $\text{sen.}\frac{x}{c}=0$, $\cos.\frac{x}{c}=1$, la prima equazione si trasforma così

6.ta $b = A + B + D$ ... numero XI.

In secondo luogo ci insegna il ~~primo~~ scolio ~~[illegible]~~ precedente ~~al problema~~, che posta $x=0$, o pure $x=L$, dove si eguagliavano a nulla relativamente ai punti estremi a, b la somma dei momenti delle forze applicate a tutto il cilindro $a\,c\,x\,b$, onde si abbia $\frac{c\,ddy}{dx^2} - \int \pm dx \int \pm \frac{My\,dx}{Lf} = 0$,

o pure sostituendo ~~...~~ c^4 in luogo di $\frac{cLf}{M}$, $\frac{c^4\,ddy}{dx^2} = \int \pm dx \int \pm y\,dx = 0$

Fatta per tanto nella equazione 3.za $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, e ponendo prima $x=0$, indi $x=L$ troveremo

7.ma $0 = A + B - D$

8.va $0 = Ae^{\frac{L}{c}} + Be^{-\frac{L}{c}} - C\,\text{sen.}\frac{L}{c} - D\cos.\frac{L}{c}$.

In terzo luogo posta $x=0$, è parimente nulla l'area $APMa = \int y\,dx$. Ma conforme ~~nel problema~~ si è stabilito ~~nel Problema~~ III al numero X. $\frac{cLf}{M}\cdot\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{c^4\,d^3y}{dx^3} = \int y\,dx$; dunque eguagliata a nulla nella equazione 4.ta la grandezza $\frac{d^3y}{dx^3}$, e mettendo $x=0$, ci si presenterà

9.a $0 = A - B - C$

~~Finalmente nello Scolio II, che segue il paradosso~~

al numero XII. ~~Problema~~ abbiamo stabilito, che ancora nella ipotesi di $x = \mathcal{L}$ deve essere $\int y dx = 0$. Quindi ponendo nella equazione 4.ta $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$, ed $x = \mathcal{L}$, si scoprirà

10.ma $0 = A e^{\frac{\mathcal{L}}{c}} - B e^{-\frac{\mathcal{L}}{c}} - C \cos. \frac{\mathcal{L}}{c} + D \operatorname{sen.} \frac{\mathcal{L}}{c}$

Col mezzo delle cinque notate condizioni si assegneranno i loro valori, e alle quattro costanti A, B, C, D, ed alla frazione $\frac{\mathcal{L}}{c}$, la quale servirà poi per istabilire la lunghezza f del pendolo semplice isocrono al cilindro AB.

La formole 7.a, 9.a [illegible] mi danno $D = A + B$, $C = A - B$, valori, che surrogati nelle formole 8.va, e 10.ma fanno loro prendere il seguente aspetto

$$0 = A e^{\frac{\mathcal{L}}{c}} + B e^{-\frac{\mathcal{L}}{c}} - \overline{A+B} \cdot \operatorname{sen} \frac{\mathcal{L}}{c} - \overline{A-B} \cdot \cos \frac{\mathcal{L}}{c}$$

$$0 = A e^{\frac{\mathcal{L}}{c}} - B e^{-\frac{\mathcal{L}}{c}} - \overline{A+B} \cdot \cos \frac{\mathcal{L}}{c} + \overline{A+B} \cdot \operatorname{sen} \frac{\mathcal{L}}{c}$$

Si deduce da queste

11.ma $$\frac{A}{B} = \frac{-e^{-\frac{\mathcal{L}}{c}} - \operatorname{sen} \frac{\mathcal{L}}{c} + \cos \frac{\mathcal{L}}{c}}{e^{\frac{\mathcal{L}}{c}} - \operatorname{sen.} \frac{\mathcal{L}}{c} - \cos. \frac{\mathcal{L}}{c}} = \frac{e^{-\frac{\mathcal{L}}{c}} - \cos. \frac{\mathcal{L}}{c} - \operatorname{sen} \frac{\mathcal{L}}{c}}{e^{\frac{\mathcal{L}}{c}} - \cos. \frac{\mathcal{L}}{c} + \operatorname{sen.} \frac{\mathcal{L}}{c}},$$

e dall'ultima equazione

$$0 = 2 - e^{\frac{\mathcal{L}}{c}} \cos. \frac{\mathcal{L}}{c} - e^{-\frac{\mathcal{L}}{c}} \cos. \frac{\mathcal{L}}{c}$$, o sia

$$e^{\frac{2\mathcal{L}}{c}} - \frac{2 e^{\frac{\mathcal{L}}{c}}}{\cos. \frac{\mathcal{L}}{c}} = -1$$. Si compisca il quadrato

ed estratta poscia la radice si troverà

12.ma $$e^{\frac{\mathcal{L}}{c}} = \frac{1 \mp \operatorname{sen} \frac{\mathcal{L}}{c}}{\cos. \frac{\mathcal{L}}{c}}$$

Il primo dà due valori, che per la formola 11.ma

competono

coincidono alla frazione $\frac{A}{B}$, si eguaglia

a $\frac{\cos.\frac{L}{c}}{1-\text{sen}\frac{L}{c}}$, il secondo a $\frac{-\cos.\frac{L}{c}}{1+\text{sen}.\frac{L}{c}}$.

Giacchè come ho sopra dimostrato,

$e^{\frac{L}{c}} = \frac{1-\text{sen}.\frac{L}{c}}{\cos.\frac{L}{c}}$, sarà pure

$0 = -e^{-\frac{L}{c}} + \cos.\frac{L}{c} + e^{-\frac{L}{c}}\text{sen}\frac{L}{c}$. Aggiungo

da una parte $e^{\frac{L}{c}}\cos.\frac{L}{c}$, e dall'altra

la grandezza eguale $1 - \text{sen}\frac{L}{c} = \overline{\text{sen}\frac{L}{c}}^2$

$+ \overline{\cos.\frac{L}{c}}^2 - \text{sen}.\frac{L}{c}$, e sottraggo da ciascheduna

le parti $\text{sen}.\frac{L}{c}\cos.\frac{L}{c}$, onde si abbia

$e^{\frac{L}{c}}\cos.\frac{L}{c} - \text{sen}\frac{L}{c}\cos.\frac{L}{c} = -e^{-\frac{L}{c}} - \text{sen}.\frac{L}{c} + \cos.\frac{L}{c} + e^{-\frac{L}{c}}\text{sen}\frac{L}{c} + \overline{\text{sen}\frac{L}{c}}^2 +$

$+ \overline{\cos.\frac{L}{c}}^2 - \text{sen}\frac{L}{c}\cos.\frac{L}{c}$, e per conseguenza

$e^{\frac{L}{c}}\cos.\frac{L}{c} - \text{sen}\frac{L}{c}\cos.\frac{L}{c} - \overline{\cos.\frac{L}{c}}^2 = -e^{-\frac{L}{c}} - \text{sen}.\frac{L}{c} + \cos.\frac{L}{c} + e^{-\frac{L}{c}}\text{sen}\frac{L}{c} + \overline{\text{sen}\frac{L}{c}}^2$

$- \text{sen}.\frac{L}{c}\cos.\frac{L}{c}$, e finalmente

$$\frac{\cos.\frac{L}{c}}{1-\text{sen}\frac{L}{c}} = \frac{-e^{-\frac{L}{c}} - \text{sen}\frac{L}{c} + \cos.\frac{L}{c}}{e^{\frac{L}{c}} - \text{sen}\frac{L}{c} - \cos.\frac{L}{c}} = \frac{A}{B}.$$

Con pari metodo proverò ancora

$$\frac{-\cos.\frac{L}{c}}{1+\text{sen}\frac{L}{c}} = \frac{e^{-\frac{L}{c}} - \cos.\frac{L}{c} - \text{sen}\frac{L}{c}}{e^{\frac{L}{c}} - \cos.\frac{L}{c} + \text{sen}.\frac{L}{c}} = \frac{A}{B};$$

e perciò avremo

$\frac{A}{B} = \frac{\pm\cos.\frac{L}{c}}{1\mp\text{sen}\frac{L}{c}}$. Da questa formola

io ricavo $B = A.\frac{1\mp\text{sen}.\frac{L}{c}}{\pm\cos.\frac{L}{c}} = A.\frac{\pm 1 - \text{sen}\frac{L}{c}}{\cos.\frac{L}{c}}$.

essendo per la formola 9.a $C = A - B$,

scopriremo $C = A.\frac{\cos.\frac{L}{c} \pm \text{sen}.\frac{L}{c} \mp 1}{\cos.\frac{L}{c}}$

Schediasma XI.

La equazione 3ma determina $D = A + B$.

Troverassi adunque $D = A \cdot \frac{\overline{\cos\frac{L}{c} \mp \operatorname{sen}\frac{L}{c} \pm 1}}{\cos\frac{L}{c}}$

Dandoci inoltre la formola 6ta $b = A+B+D$, e la 3^{za} $D = A+B$, ne risulta

$$b = 2D = 2A\cdot \frac{\overline{\cos\frac{L}{c} \mp \operatorname{sen}\frac{L}{c}\pm 1}}{\cos\frac{L}{c}}$$ *

* I due valori di D mi somministrano quello di $A = \frac{b\cos\frac{L}{c}}{2\cdot\cos\frac{L}{c} - \operatorname{sen}\frac{L}{c}\pm 1}$

Or ecco i valori delle quattro costanti, i quali si renderanno noti, ridotto che si abbia a computo la porzione $\frac{L}{c}$ col mezzo della equazione 11ma.

13^a $$A = \frac{b\cos\frac{L}{c}}{2\cdot\overline{\cos\frac{L}{c} \mp \operatorname{sen}\frac{L}{c}\pm 1}} = \frac{b\cdot\overline{\pm 1\mp\operatorname{sen}\frac{L}{c}-\cos\frac{L}{c}}}{2\operatorname{sen}\frac{L}{c}}$$

14^a $$B = \frac{b\cdot\overline{\pm 1\mp\operatorname{sen}\frac{L}{c}}}{2\cdot\overline{\cos\frac{L}{c}\mp\operatorname{sen}\frac{L}{c}\pm 1}} = \frac{b\cdot\overline{\mp 1\mp\operatorname{sen}\frac{L}{c}+\cos\frac{L}{c}}}{2\operatorname{sen}\frac{L}{c}}$$

15^a $$C = \frac{b\cdot\overline{\mp 1+\operatorname{sen}\frac{L}{c}+\cos\frac{L}{c}}}{2\cdot\overline{\cos\frac{L}{c}\mp\operatorname{sen}\frac{L}{c}\pm 1}} = \frac{b\cdot\overline{\pm 1\mp\cos\frac{L}{c}}}{2\operatorname{sen}\frac{L}{c}}$$

16^a $$D = \frac{b}{2} = \frac{b\operatorname{sen}\frac{L}{c}}{2\operatorname{sen}\frac{L}{c}}$$

Le seconde espressioni delle costanti A, B, C si provano eguali alle prime con un breve giro di computo, che io lascio alla industria di chi legge.

Sostituiti questi valori nella equazione (1.), troveremo

17^a $$\frac{y}{b} = \frac{e^{\frac{x}{c}}\cos\frac{L}{c}+e^{-\frac{x}{c}}\cdot\overline{\pm 1\mp\operatorname{sen}\frac{L}{c}}}{2\cdot\overline{\cos\frac{L}{c}\mp\operatorname{sen}\frac{L}{c}\pm 1}} \pm\frac{\overline{1\mp\cos\frac{L}{c}}\cdot\operatorname{sen}\frac{x}{c}+\operatorname{sen}\frac{L}{c}\cos\frac{x}{c}}{2\operatorname{sen}\frac{L}{c}}$$

† Ridurre a forma più semplice la formola (17.)

XIV. Prendansi le ascisse † dall'origine dal punto medio C (Fig. 19.ª e 20.ª), e chiamata $CP = z$, sarà $x = \frac{1}{2}L - z$. Avremo per tanto $e^{\frac{x}{c}} = e^{\frac{L}{2c}}e^{\frac{-z}{c}}$, e giacchè per le

equazione

equazione 1a.^{ma} $e^{\frac{L}{nc}} = \sqrt{\frac{1\mp \text{sen}\frac{L}{c}}{\cos\frac{L}{c}}}$, scopriremo

$e^{\frac{x}{c}} = e^{\frac{-z}{c}}\sqrt{\frac{1\mp\text{sen}\frac{L}{c}}{\cos\frac{L}{c}}}$, $e^{-\frac{x}{c}} = e^{\frac{z}{c}}\sqrt{\frac{\cos\frac{L}{c}}{1\mp \text{sen}\frac{L}{c}}}$.

Quindi sarà $\frac{Ae^{\frac{x}{c}}+Be^{-\frac{x}{c}}}{c} = \frac{e^{\frac{x}{c}}\cos\frac{L}{c} + e^{-\frac{x}{c}}\cdot\overline{\pm1-\text{sen}\frac{L}{c}}}{n\cdot\cos\frac{L}{c}-\text{sen}\frac{L}{c}\pm1} =$

$\frac{\pm e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{L}{c}\cdot\overline{1\mp\text{sen}\frac{L}{c}}}}{n\cdot\cos\frac{L}{c}-\text{sen}\frac{L}{c}\pm1} = \frac{\pm e^{\frac{z}{c}}+e^{-\frac{z}{c}}}{n\cdot \pm e^{\frac{L}{nc}}+e^{-\frac{L}{nc}}}$.

Quest'ultimo valore dipende da ciò, che per la formola 1a.^{ma} $\pm e^{\frac{L}{nc}} + e^{-\frac{L}{nc}} =$

$\pm\sqrt{\frac{1\mp\text{sen}\frac{L}{c}}{\cos\frac{L}{c}}} + \sqrt{\frac{\cos\frac{L}{c}}{1\mp\text{sen}\frac{L}{c}}} = \frac{\cos\frac{L}{c}-\text{sen}\frac{L}{c}\pm1}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}\cdot\overline{1\mp\text{sen}\frac{L}{c}}}}$.

La Trigonometria ci istruisce essere

$\overline{\pm1-\cos\frac{L}{c}}\cdot\text{sen}\frac{x}{c}+\text{sen}\frac{L}{c}\cos\frac{x}{c} = \pm\text{sen}\frac{x}{c}+\text{sen}\frac{\overline{L-x}}{c}$,

e sostituendo nell'omogeneo di comparazione in cambio di x il suo valore $\frac{1}{n}L-z$,

$\overline{\pm1-\cos\frac{L}{c}}\cdot\text{sen}\frac{x}{c}+\text{sen}\frac{L}{c}\cos\frac{x}{c} = \pm\text{sen}\overline{\frac{L}{nc}-\frac{z}{c}}+\text{sen}\overline{\frac{L}{nc}+\frac{z}{c}}$.

Nella formola 17.^{a} alle grandezze espresse per x si sostituiscano le eguali espresse per z or ora determinate, e si avrà

14.^{a} $\frac{ny}{b} = \frac{\pm e^{\frac{z}{c}}+e^{-\frac{z}{c}}}{\pm e^{\frac{L}{nc}}+e^{-\frac{L}{nc}}}\cdot\frac{\pm\text{sen}\overline{\frac{L}{nc}-\frac{z}{c}}+\text{sen}\overline{\frac{L}{nc}+\frac{z}{c}}}{\text{sen}\frac{L}{c}}$.

Abbiamo inoltre $e^{\frac{L}{nc}}+e^{-\frac{L}{nc}} = \frac{\cos\frac{L}{c}-\text{sen}\frac{L}{c}+1}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}\cdot\overline{1-\text{sen}\frac{L}{c}}}} = \frac{\mp n\cos\frac{L}{nc}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}$ (a),

$-e^{\frac{L}{nc}}+e^{-\frac{L}{nc}} = \frac{\cos\frac{L}{c}-\text{sen}\frac{L}{c}-1}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}\cdot\overline{1+\text{sen}\frac{L}{c}}}} = \frac{\pm n\,\text{sen}\frac{L}{nc}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}$ (b),

$\frac{\text{sen}\overline{\frac{L}{nc}-\frac{z}{c}}+\text{sen}\overline{\frac{L}{nc}+\frac{z}{c}}}{\text{sen}\frac{L}{c}} = \frac{\cos\frac{z}{c}}{\cos\frac{L}{nc}}$ (c)

$\frac{-\text{sen}\overline{\frac{L}{nc}-\frac{z}{c}}+\text{sen}\overline{\frac{L}{nc}+\frac{z}{c}}}{\text{sen}\frac{L}{c}} = \frac{\text{sen}\frac{z}{c}}{\text{sen}\frac{L}{nc}}$ (d). *

La surrogazione di nuovi valori ci somministra

le due

* Nella formola (a), i segni del meno e del più interposti a $n\cos\frac{L}{nc}$ sono adattati alle due circostanze, quella in cui $\cos\frac{L}{nc}$ sia quantità negativa, quella che $\cos\frac{L}{nc}$ sia quantità positiva. I segni più e meno nella formola (b), che precedono $n\,\text{sen}\frac{L}{nc}$, servono ai due casi, che $\text{sen}\frac{L}{nc}$ sia o negativo, o positivo.

* 94. ~~A mano~~ Secondo ciò, che poco fa ho notato, i segni superiori nelle equazioni 19, e 20 suppongono cos·$\frac{L}{2c}$, sen·$\frac{L}{2c}$ quantità negative, gl'inferiori le suppongono ~~negative~~ positive.

Schediasma XI.

le due seguenti equazioni, che nella più semplice forma esprimono le curve dei due diversi generi analoghe a quelle, che sono nelle fig.re 19, e 20. rispettivamente

19.a $$\frac{2y}{b} = \mp \frac{\left(e^{\frac{z}{c}} \mp e^{-\frac{z}{c}}\right)\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}{2\cos\frac{L}{2c}} + \frac{\cos\frac{z}{c}}{\cos\frac{L}{2c}}.$$

20.a $$\frac{2y}{b} = \mp \frac{\left(e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\right)\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}{2\,\mathrm{sen}\frac{L}{2c}} + \frac{\mathrm{sen}\frac{z}{c}}{\mathrm{sen}\frac{L}{2c}}.$$

*

~~Corollario I~~

~~Corollario particolare ...~~

Scolio I. ~~...~~

XV.

(a) L'enunciata riduzione si può dimostrare così. Il noto teorema trigonometrico ci suggerisce l'equazione $\cos\frac{L}{c} = \cos\frac{L}{2c}^2 - \mathrm{sen}\frac{L}{2c}^2$: ma $\mathrm{sen}\frac{L}{2c}^2 = 1 - \cos\frac{L}{2c}^2$. Dunque $\cos\frac{L}{c} + 1 = 2\cos\frac{L}{2c}^2$, ossia $2\cos\frac{L}{c} + 2 = 4\cos\frac{L}{2c}^2$. Aggiungo, e sottraggo le due quantità eguali $\frac{\cos\frac{L}{c}^2}{1-\mathrm{sen}\frac{L}{c}}$, $1+\mathrm{sen}\frac{L}{c}$, e mi si presenta

$$\frac{\cos\frac{L}{c}^2}{1-\mathrm{sen}\frac{L}{c}} + 2\cos\frac{L}{c} + 1 - \mathrm{sen}\frac{L}{c} = 4\cos\frac{L}{2c}^2,$$ ed estratta la radice,

$$\frac{\cos\frac{L}{c}}{\sqrt{1-\mathrm{sen}\frac{L}{c}}} + \sqrt{1-\mathrm{sen}\frac{L}{c}} = \mp 2\cos\frac{L}{2c},$$ ovvero $$\frac{\cos\frac{L}{c} + 1 - \mathrm{sen}\frac{L}{c}}{\sqrt{1-\mathrm{sen}\frac{L}{c}}} = \mp 2\cos\frac{L}{2c},$$

e dividendo il tutto per $\sqrt{\cos\frac{L}{c}}$, $\frac{\cos\frac{L}{c} + 1 - \mathrm{sen}\frac{L}{c}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}\cdot\left(1-\mathrm{sen}\frac{L}{c}\right)}} = \mp\frac{2\cos\frac{L}{2c}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}$: il che &c. ~~...~~

(b) Questa riduzione si prova con un metodo simile al precedente. Essendo $2 - 2\cos\frac{L}{c} = 4\,\mathrm{sen}\frac{L}{2c}^2$, e $\frac{\cos\frac{L}{c}^2}{1+\mathrm{sen}\frac{L}{c}} - 1 + \mathrm{sen}\frac{L}{c} = 0$, avremo

$$\frac{\cos\frac{L}{c}^2}{1+\mathrm{sen}\frac{L}{c}} - 2\cos\frac{L}{c} + 1 + \mathrm{sen}\frac{L}{c} = 4\,\mathrm{sen}\frac{L}{2c}^2,$$ e cavando la radice

$$\frac{\cos\frac{L}{c}}{\sqrt{1+\mathrm{sen}\frac{L}{c}}} - \sqrt{1+\mathrm{sen}\frac{L}{c}} = \mp 2\,\mathrm{sen}\frac{L}{2c},$$ e final.te $$\frac{\cos\frac{L}{c} - 1 - \mathrm{sen}\frac{L}{c}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}\cdot\left(1+\mathrm{sen}\frac{L}{c}\right)}} = \mp\frac{2\,\mathrm{sen}\frac{L}{2c}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}$$: il che &c. ~~...~~

(c) (d) è noto avere $\pm\,\mathrm{sen}\left(\frac{L}{2c} - \frac{z}{c}\right) = \pm\,\mathrm{sen}\frac{L}{2c}\cos\frac{z}{c} \mp \cos\frac{L}{2c}\,\mathrm{sen}\frac{z}{c}$, $\mathrm{sen}\left(\frac{L}{2c} + \frac{z}{c}\right) = \mathrm{sen}\frac{L}{2c}\cos\frac{z}{c} + \cos\frac{L}{2c}\,\mathrm{sen}\frac{z}{c}$, e perciò $\mathrm{sen}\left(\frac{L}{2c} - \frac{z}{c}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{L}{2c} + \frac{z}{c}\right) = 2\,\mathrm{sen}\frac{L}{2c}\cos\frac{z}{c}$, $-\mathrm{sen}\left(\frac{L}{2c} - \frac{z}{c}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{L}{2c} + \frac{z}{c}\right) = 2\cos\frac{L}{2c}\,\mathrm{sen}\frac{z}{c}$. Ma come parimente si sa, $\mathrm{sen}\frac{L}{c} = 2\,\mathrm{sen}\frac{L}{2c}\cos\frac{L}{2c}$, dunque $\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{L}{2c} - \frac{z}{c}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{L}{2c} + \frac{z}{c}\right)}{\mathrm{sen}\frac{L}{c}} = \frac{\cos\frac{z}{c}}{\cos\frac{L}{2c}}$, $\frac{-\mathrm{sen}\left(\frac{L}{2c} - \frac{z}{c}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{L}{2c} + \frac{z}{c}\right)}{\mathrm{sen}\frac{L}{c}} = \frac{\mathrm{sen}\frac{z}{c}}{\mathrm{sen}\frac{L}{2c}}$: il che &c.

~~Scolium~~

XV. Le cose [illegible] per derivar la tavolla uso V, richiedonsi, relativamente alla formola 19ª si dimostri essere $-a^{\frac{L}{2c}}+a^{-\frac{L}{2c}} = \frac{-1+\text{sen}\frac{L}{c}+\cos\frac{L}{c}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}\cdot\overline{1-\text{sen}\frac{L}{c}}}} =$

$= \frac{\mp 2\,\text{sen}\frac{L}{2c}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}$. e primieramente

la formola 19ª si dà per riguardo alla equazione 19ª $-a^{\frac{L}{2c}}+a^{-\frac{L}{2c}} = -\sqrt{\frac{1-\text{sen}\frac{L}{c}}{\cos\frac{L}{c}}}$

$+\sqrt{\frac{\cos\frac{L}{c}}{1-\text{sen}\frac{L}{c}}} = \frac{-1+\text{sen}\frac{L}{c}+\cos\frac{L}{c}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}\cdot\overline{1-\text{sen}\frac{L}{c}}}}$.

Provo in secondo luogo, che si avrà l'equazione $\frac{-1+\text{sen}\frac{L}{c}+\cos\frac{L}{c}}{\sqrt{1-\text{sen}\frac{L}{c}}} = \mp 2\,\text{sen}\frac{L}{2c}$.

Abbiamo dalla Trigonometria $2\,\text{sen}\frac{L}{c} =$

$= 4\,\text{sen}\frac{L}{2c}\cos\frac{L}{2c}$; e moltiplicando, e dividendo per $1-\text{sen}\frac{L}{c}$,

$\frac{2\,\text{sen}\frac{L}{c} - 2\,\overline{\text{sen}\frac{L}{c}}^2}{1-\text{sen}\frac{L}{c}} = 4\,\text{sen}\frac{L}{2c}\cos\frac{L}{2c}$. uno de' due quadrati

Pongo in cambio di $1-\text{sen}\frac{L}{c}^2$ il suo valore $-1+\cos\frac{L}{c}^2$, e mi si presenta

$\frac{-1+2\,\text{sen}\frac{L}{c}-\overline{\text{sen}\frac{L}{c}}^2+\overline{\cos\frac{L}{c}}^2}{1-\text{sen}\frac{L}{c}} = 4\,\text{sen}\frac{L}{2c}\cos\frac{L}{2c}$

Dalla annotazione (a) si cavasi.

$\mp 2\cos\frac{L}{2c} = \frac{1-\text{sen}\frac{L}{c}+\cos\frac{L}{c}}{\sqrt{1-\text{sen}\frac{L}{c}}}$. Sosti-

tuisco questo valore, e dividendo poscia per lo stesso ritroverassi

$\frac{-1+\text{sen}\frac{L}{c}+\cos\frac{L}{c}}{\sqrt{1-\text{sen}\frac{L}{c}}} = \mp 2\,\text{sen}\frac{L}{2c}$, e perciò

$-a^{\frac{L}{2c}}+a^{-\frac{L}{2c}} = \frac{-1+\text{sen}\frac{L}{c}+\cos\frac{L}{c}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}\cdot\overline{1-\text{sen}\frac{L}{c}}}} = \frac{\mp 2\,\text{sen}\frac{L}{2c}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}$.

[illegible]

XVII. Inconveniente nel Corollario 3.° dedotto dalla formola (20.) l'equazione $e^{\frac{x}{2c}} + e^{-\frac{x}{2c}} = \mp \frac{2\cos\frac{x}{2c}}{\sqrt{\cos\frac{x}{c}}}$, la di cui verità precedentemente dimostro.

(Questa memoria si trasporti a suo luogo pag. 106. dopo le parole che di sola vibrazione.)

La una equazione (12.) si converte rispettivamente alla formola (20.) in $e^{\frac{x}{2c}} + e^{-\frac{x}{2c}} = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}\frac{x}{c}}{\cos\frac{x}{c}}} + \sqrt{\frac{\cos\frac{x}{c}}{1+\operatorname{sen}\frac{x}{c}}}$ $= \frac{1+\operatorname{sen}\frac{x}{c}+\cos\frac{x}{c}}{\sqrt{\cos\frac{x}{c}\cdot 1+\operatorname{sen}\frac{x}{c}}}$. Egli è d'uopo dunque provare adempiersi l'equazione $\frac{1+\operatorname{sen}\frac{x}{c}+\cos\frac{x}{c}}{\sqrt{1+\operatorname{sen}\frac{x}{c}}} = \mp 2\cos\frac{x}{2c}$.

Moltiplico, e divido per $1+\operatorname{sen}\frac{x}{c}$ il primo membro dell'equazione $-2\operatorname{sen}\frac{x}{c} = -4\cos\frac{x}{2c}\operatorname{sen}\frac{x}{2c}$, onde si abbia $\frac{-2\operatorname{sen}\frac{x}{c} - 2\operatorname{sen}\frac{x}{c}^2}{1+\operatorname{sen}\frac{x}{c}} = -4\cos\frac{x}{2c}\operatorname{sen}\frac{x}{2c}$. In luogo di uno de' due quadrati $-\operatorname{sen}\frac{x}{c}^2$ colloco il suo valore $-1+\cos\frac{x}{c}^2$, e trovo $\frac{-1-2\operatorname{sen}\frac{x}{c} - \operatorname{sen}\frac{x}{c}^2 + \cos\frac{x}{c}^2}{1+\operatorname{sen}\frac{x}{c}} = -4\cos\frac{x}{2c}\operatorname{sen}\frac{x}{2c}$: ma, per l'annotazione (6) $\pm 2\operatorname{sen}\frac{x}{2c} = \frac{-1-\operatorname{sen}\frac{x}{c}+\cos\frac{x}{c}}{\sqrt{1+\operatorname{sen}\frac{x}{c}}}$; dunque surrogando un tal valore, e dividendo poscia per lo stesso, scopriremo $\frac{1+\operatorname{sen}\frac{x}{c}+\cos\frac{x}{c}}{\sqrt{1+\operatorname{sen}\frac{x}{c}}} = \mp 2\cos\frac{x}{2c}$, e conseguentemente sarà $e^{\frac{x}{2c}} + e^{-\frac{x}{2c}} = \frac{1+\operatorname{sen}\frac{x}{c}+\cos\frac{x}{c}}{\sqrt{\cos\frac{x}{c}\cdot 1+\operatorname{sen}\frac{x}{c}}} = \frac{\mp 2\cos\frac{x}{2c}}{\sqrt{\cos\frac{x}{c}}}$: il che &.

§ Corollarj, che si deducono dalla formola (19.)

XVI. Dalla formola (19) si deducono i seguenti corollarj.

1. Ponendo nella detta formola l'assissa $z = 0$ &c

§ Corollario I.

Considero primamente la formola ... ponendo l'assissa $z = 0$

$z = 0$, ne risulterà il valore della applicata $y = Cc$ in tutte le curve analoghe a quella della Fig. 19, dalle quali viene l'asse AB tagliato in un numero pari di punti. Avremo per tanto

$$\frac{Cc}{Aa} = \frac{y}{b} = \frac{\mp\sqrt{\cos\frac{L}{c}} + 1}{2\cos\frac{L}{2c}} = ~~\ldots~~$$

$$= \frac{1}{2}\sec\frac{L}{2c} \mp \frac{1}{2}\sec\frac{L}{2c}\sqrt{\cos\frac{L}{c}} \quad (a)$$

Dal ridurre a computo relativamente a ciascuna curva del genere di quella della Fig. 19 la frazione $\frac{L}{c}$ dipende la determinazione del valore della linea Cc.

Mi riserbo ad insegnare il metodo di cui nel conteggio ~~...~~ al numero XIX. e seguenti.

~~...~~

2. Si prendano le differenze nella formola 10.a e scopriremo

$$\frac{2c\,dy}{b\,dz}\cdot\cos\frac{L}{2c} = \frac{\mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}{2} - \operatorname{sen}\frac{z}{c}\cdot(11^a$$

Facciasi $\frac{dy}{dz} = 0$, e le radici della equazione $\mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{L}{c}} - 2\operatorname{sen}\frac{z}{c} = 0$ determineranno i valori delle ascisse z, alle quali corrispondono le massime ordinate y nelle curve analoghe a quella nella Fig. 19. delineata. Secondo che queste curve tagliano l'asse AB in 2, 4, 6, 8, ecc., i numeri delle predette radici saranno 1, 3, 5, 7 ecc.

~~Dunque ... $\frac{\ldots}{2c}$ ... $\frac{\ldots}{c}$ ... $\frac{\ldots}{2c}$ ... $\cos\frac{z}{c}$ ...~~

(a) Stando come il seno tutto al coseno, così la secante al seno tutto, si verifica l'equazione $\sec\frac{L}{2c} = \frac{1}{\cos\frac{L}{2c}}$, o sia $\frac{1}{2}\sec\frac{L}{2c} = \frac{1}{2\cos\frac{L}{2c}}$.

Schediasma XI

Una delle radici della nostra equazione si è $z = 0$, e perciò nella curva di cui parliamo è massima l'ordinata Cc corrispondente al punto medio C del cilindro AB.

Corollario III.

3. Fatta $y = 0$ si trovano i punti 2, 4, 6, 8 ne' quali l'asse AB vien tagliato ~~dalle curve~~ dalle curve comprese nella 19ᵃ equazione. Avremo per tanto

$$\mp e^{\frac{z}{c}} \mp e^{-\frac{z}{c}} + 2\cos\frac{z}{c} = 0. \quad \text{Mentre il cilindro}$$
$$\sqrt{\cos\frac{z}{c}}$$

oscilla, questi punti restano immobili, e quindi sottoponendo ai punti per esempio e, 7 (fig. 19.) due appoggi, non sono ~~restano~~ da essi frastornate le vibrazioni del cilindro. La mentovata figura esprime il modo principale, onde si libra il cilindro rendendo il suono fra tutti il più grave. I punti stabili e, 7 distano dalle estremità del cilindro A, B per le linee eA, 7B che come vedremo poco calano dalla quarta parte della lunghezza AB. Negli strumenti di cilindri formati i punti e, 7 riposano su due scannelli, essendo riuscito alla pratica per via di replicati tentativi di accorgersi di una proprietà, senza della quale non potrebbe la musica valersi dei nostri corpi sonori.

Corollario IV.

4. Differenzio ~~nuovamente~~ la formula 21 e scopro

~~$\frac{2c^2 ddy}{dz^2} \ldots$~~

$$(22)\quad \frac{4c^2 ddy}{6\, dz^2}\cos\frac{z}{2c} = \mp e^{\frac{z}{c}} \mp e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{z}{c}} - 2\cos\frac{z}{c}$$

Abbiamo veduto al numero XI. ~~nello Scolio del problema~~ ~~III~~, che quando $\frac{ddy}{dx^2} = \frac{ddy}{dz^2} = 0$, è parimente nulla

nulla in quel tal sito la curvatura del cilindro, ed il momento della sua elasticità, come altresì la somma dei momenti delle forze applicate al cilindro stesso, o da una parte, o dall'altra. Si è pure fatta la riflessione, che ciò interviene nei punti estremi a, b del cilindro. Dunque nella equazione (22) $\frac{r\,ddy}{dz^2} = 0$; o vero a' sua affaccia rispettivamente

$$\mp e^{\frac{z}{c}} \mp e^{-\frac{z}{c}} - n\cos\frac{z}{c} = 0$$
$$\overline{\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}$$

ai punti estremi a, b, è $z = \pm\frac{L}{2}$, e queste devono essere due radici della nostra equazione. In fatti sostituendo in cambio di z i detti valori, e fatta la riflessione essere $\cos -\frac{L}{2c} = \cos\frac{L}{2c}$, troveremo in tutti e due i casi

$$\frac{\mp e^{\frac{L}{2c}} \mp e^{-\frac{L}{2c}} - n\cos\frac{L}{2c}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}}} = 0\text{, ovvero}$$

$$\frac{e^{\frac{L}{2c}} + e^{-\frac{L}{2c}} = \mp n\cos\frac{L}{2c}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}$$

; equazione, che ho dimostrato al numero XIV. essere vera, nella annotazione (a)

"Il numero delle radici della equazione, di cui trattiamo, si eguaglia a quello de' punti 2, 4, 6, ec. nei quali le curve tagliano la AB: Davvero le due radici $z = \pm\frac{L}{2}$, le rimanenti 0, 2, 4, 6, ec. servono a determinare nelle curve altrettanti flessi contrarj, ed in tali siti parimente si eguaglia a nulla la curvatura del cilindro e la somma dei momenti delle forze applicate o a destra, o a sinistra.

Fig. 79.

Le due metà per esempio $c\,a$, $c\,b$ delle nostre curve sono eguali e simili, egualmente in maniera che collocate quelle due assi eguali CD, CE una positiva, e

Schediasma XI.

* Se però paragonare il nulla la somma dei momenti rispettivamente al punto estremo b delle forze applicate al cilindro a C c 7 b, egli è necessario, che le forze ovvero le ordinate della curva ad esse proporzionali siano parte positive, e parte negative. Quindi la passando tra i due rami C a, c 7 b in somiglianza ovvero [illegible], si richiede indispensabilmente, che nascano negli [illegible] asse AB almeno in un punto come nella fig.a 19 succede.

e l'altra negativa, s'eguagliano le corrispondenti ordinate PM, QN, e sono amendue o positive o negative. In prova di ciò serva a chi legge la riflessione, che quando $\cos\frac{z}{c} = \cos -\frac{z}{c}$ nulla s'altera la formola 19 mentre si cangia il segno alla incognita z, e quindi x, assunte eguali una positiva, e l'altra negativa si riferiscono ordinate eguali; e similmente [illegible]. ~~Siccome [illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~

* somma dei momenti relativamente al punto M delle forze applicate alla porzione di cilindro a M è proporzionale a $\frac{b\,d^2y}{dx^2} = \frac{b\,d^2y}{dz^2}$ o sia alla quantità $\mp e^{\frac{z}{c}} \mp e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{L}{c}} - n\cos\frac{z}{c}$. Taglio CQ = CP, e scopro l'aggregato dei momenti ~~delle forze applicate~~ in riguardo al punto N delle forze applicate alla parte a C c N del cilindro come $\mp e^{-\frac{z}{c}} \mp e^{\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{L}{c}} - n\cos -\frac{z}{c}$.

L'eguaglianza delle ritrovate grandezze mostra che sono eguali le somme dei ~~momenti~~ momenti; ma il complesso dei momenti rispettivamente al punto N delle forze applicate al cilindro a C c N pareggia quello in relazione al punto M delle forze applicate al cilindro b 7 c M; dunque si eguagliano le somme dei momenti a destra, e a sinistra del punto M posto ad arbitrio, i quali perciò fanno equilibrio e colla elasticità del cilindro nel punto M, e fra loro, di modo che non può seguire verun moto di rotazione.

Corollario V.

5. Prese le differenze nella formola (a 2), avremo

$$(a\,3.)\quad \frac{a\,x^3 d^3y \cos\frac{L}{nc}}{6\,dz^3} = \mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{L}{c}} + n\sin\frac{z}{c}.$$

Dal Problema III ~~[illegible]~~ numero x. raccogliesi essere $\frac{CLf}{M}\frac{d^3y}{dx^3} =$

$\frac{c^4 d^3 y}{dx^3} = \int y\,dx$. Nello ~~Scolio I del quale~~

~~[illegible]~~ ho notato, che la somma delle forze applicate al cilindro a M è proporzionale all'area a M P A $= \int y\,dx = \int -y\,dz$. Si inferisca, che questa somma muta la ragione di $\frac{c^4 d^3 y}{dx^3} = \frac{c^4 d^3 y}{-dz^3}$,

o sia per l'equazione (n. 8.) della quantità

$\pm e^{\frac{z}{c}} \mp e^{-\frac{z}{c}} \sqrt{\cos\frac{L}{c}} - n\,\mathrm{sen}\,\frac{z}{c}$. ~~[illegible]~~ Qualora si

abbia $\pm e^{\frac{z}{c}} \mp e^{-\frac{z}{c}} \sqrt{\cos\frac{L}{c}} - n\,\mathrm{sen}\,\frac{z}{c} = 0$, si agguaglierà a nulla l'aggregato delle forze applicate al cilindro a M. ~~[illegible]~~ L'ultima formola ha sempre le tre radici. Posta $z = 0$,

$z = 0$, $z = \frac{L}{n}$, $z = -\frac{L}{n}$.

~~[illegible]~~ chiaramente si scopre essere

$\pm e^{\frac{0}{c}} \mp e^{-\frac{0}{c}} = \pm 1 \mp 1 = 0$, $n\,\mathrm{sen}\,\frac{0}{c} = 0$.

Questa radice mi addita agguagliarsi a nulla il complesso delle forze applicate alla metà del cilindro a CC, e che per conseguenza l'area positiva a CA pareggia la negativa CCc. Le altre due radici

$z = \frac{L}{n}$, $z = -\frac{L}{n}$ mi danno, quella

$\pm e^{\frac{L}{nc}} \mp e^{-\frac{L}{nc}} \sqrt{\cos\frac{L}{c}} - n\,\mathrm{sen}\,\frac{L}{nc} = 0$, questa

$\pm e^{-\frac{L}{nc}} \mp e^{\frac{L}{nc}} \sqrt{\cos\frac{L}{c}} - n\,\mathrm{sen}\,-\frac{L}{nc} = 0$, e giac-

chè $-n\,\mathrm{sen}\,\frac{L}{nc} = n\,\mathrm{sen}\,\frac{L}{nc}$, trovo in tutti e due i casi $-e^{\frac{L}{nc}} + e^{-\frac{L}{nc}} = \mp \frac{n\,\mathrm{sen}\,\frac{L}{nc}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}$, equa-

al numero XV. Scolio I ho di-

zione, che ~~nella~~ ~~[illegible]~~ (falsa) non può verificarsi. Dalla radice $z = \frac{L}{n} =$ CA si ricava, che una somma di forze eguale a nulla si applica alla porzione a M del cilindro, quando essa porzione pareggia il nulla.

Qualunque

Schadiasma XI.

(+ qui viene il num.° XVII che si legge alla pag. 100.)

Finalmente, ja questo è quel che più importa, in vedere $z = -\frac{L}{2} = CB$ si manifesta esser nullo l'aggregato delle forze applicate a tutto il cilindro AB, cioè a dire che le forze negative s'eguagliano alle positive. In sì fatta guisa non potendo il cilindro girare intorno qualsivoglia punto M, ed essendo egualmente tirato per le direzioni opposte Cc, cC, viene egli dalle forze MH eguali e contrarie a quelle, che tentano di farlo reciprocare, rattenuto immobilmente nella positura ACZB, e rimosse che forze MH non concepisce altro moto, che di sola vibrazione.

Corollarj, che si deducono dalla formola (20).

XVIII. Dalla formola (20.) ne nascono i corollarj seguenti.

1. La mentovata formola comprende tutte le curve che

~~Corollario I~~

~~Passo all'esame della formola 20, dico che~~ comprende tutte le curve analoghe alla figura, che segano l'asse AB nel punto medio C. In fatti posta $z = CP = 0$, si trova $y = 0$. Le nostre curve hanno la comune proprietà, che a due ascisse eguali CP, CQ, una positiva, e l'altra negativa corrispondono due ordinate eguali una positiva, e l'altra negativa, o al rovescio PM, QN. Se nella equazione

$$20. \quad \frac{ray}{b} = \mp \frac{e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}}{2\,\text{sen}\,\frac{L}{2c}} \sqrt{\cos\frac{L}{c}} + \frac{\text{sen}\,\frac{z}{c}}{\text{sen}\,\frac{L}{2c}}$$

cangeremo il segno alla incognita z, scriveremo

$$\frac{ry}{b} = \mp \frac{e^{-\frac{z}{c}} \pm e^{\frac{z}{c}}}{2\,\text{sen}\,\frac{L}{2c}} \sqrt{\cos\frac{L}{c}} + \frac{\text{sen}\,-\frac{z}{c}}{\text{sen}\,\frac{L}{2c}}$$

Il raccozzare delle due espressioni dimostra, che essendo $\text{sen}\,-\frac{z}{c} = -\text{sen}\,\frac{z}{c}$, a pari ascisse CP, CQ quella positiva, e questa ~~positiva~~ negativa si riferiscono ordinate eguali PM, QN, ma affette da segni contrarj. Quindi le due metà di curva CgeA, CKZB sono eguali, e simili, ma inversamente collocate e in riguardo alle ascisse, e in riguardo alle ordinate. Lo stesso dicasi delle

delle due porzioni di curva a a g c k N, b ? k c g M. Si osservi, che a parti eguali per esempio g, k di queste porzioni di curva applicate forze eguali e contrarie, e che per conseguenza le somme dei momenti relativamente ai punti N, M delle forze applicate ad esse porzioni sono fra loro eguali, ma una positiva, e l'altra negativa.

Corollario VIII.

1. Col mettere $y = 0$ si determinano i punti z, s, ?, g ne' quali le curve contenute nella equazione (20.) segano l'asse AB. Una tale ipotesi ci somministra l'equazione $\mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}} \sqrt{\cos} + a \operatorname{sen} \frac{z}{c} = 0$, che va sempre fornita della radice $z = 0$. Mentre adunque il cilindro riposa equilibrato sopra un coricuore sottoposto al punto medio C, può rimanere in tutte le curve esposte dalla equazione (20.), e rendere i moti ad esse curve confacenti, fra quali il più grave si è quello, che produce il cilindro, quando si conforma alla curva della fig. 20. Se gli appoggi adunque sotto gli altri punti immobili a, d si serve lo stesso ..., chi vuole evitare un secondo chiavo e ferro, avverta di non battere il cilindro ne' punti stabili e, c, ?. I siti più rimoti da questi stabili sono i più opportuni per dar punti fissi, o specialmente i dischi g, k al battello, o specialmente le macchine ordinate cui corrispondono le ... Non riesce molto utile il porre g g, k k. Non riesce il cilindro in vicinanza dei punti medesimi A, B, perchè parte della forza s'esercita a far girare il cilindro intorno il più vicino sostegno.

Corollario

Schediasma XI.

Corollario [illegible].

3. Differenziando la formola (20.), onde si abbia

(24.) $$\frac{4c\,dy}{-b\,dz}\cdot\operatorname{sen}\frac{L}{2c} = \pm e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{L}{c}} - 2\cos\frac{z}{c}.$$

Le radici della equazione $\pm e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{L}{c}} - 2\cos\frac{z}{c} = 0$ determinano i punti per esempio G, K, ai quali corrispondono le massime ordinate Gg, Kk. I numeri di tali ordinate saranno 2, 4, 6, 8 &c. secondochè le curve taglieranno l'asse AB in punti 3, 5, 7, 9 &c.

Corollario [illegible]

4. Dando di bel nuovo in differenziare nella equazione (24.), si trova

(25.) $$\frac{4c^2\,ddy}{b\,dz^2}\operatorname{sen}\frac{L}{2c} = \mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{L}{c}} - 2\operatorname{sen}\frac{z}{c}.$$

Essendo la somma dei momenti in relazione al punto M delle forze applicate alla porzione aM del cilindro proporzionale a $\frac{ddy}{dz^2}$, la ragione della grandezza $\mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{L}{c}} - 2\operatorname{sen}\frac{z}{c}$.

In quei siti dove la predetta somma si eguaglia a nulla, egli è di uopo che si adempia l'equazione $\mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{L}{c}} - 2\operatorname{sen}\frac{z}{c} = 0$.
Ha luogo questa le sue radici $z = \pm\frac{L}{2}$, $z = 0$. Posta $z = \pm\frac{L}{2}$ si trova $\mp e^{\frac{L}{2c}} \pm e^{-\frac{L}{2c}} = \frac{\pm 2\operatorname{sen}\frac{L}{2c}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}$ conforme a ciò che ho dimostrato nell'annotazione (i'). La prima radice determina il punto A, e ne insegna, che quando la parte aM del cilindro pareggia il nulla, ed il punto M coincide col punto A, è parimente nulla la somma dei momenti rispetto ovvero relativamente al punto M delle forze ad essa parte applicate. Dalla seconda radice, che ci

dà

dà il punto B, si ricava eguagliarsi a nulla
l'aggregato dei momenti in riguardo al
punto b delle forze applicate a tutto il
cilindro a g c k b. La forza vedesi
sopra il punto c, e fa palese che al nulla
equivale ~~[illegible]~~ la somma dei momenti per
rapporto al punto c delle forze applicate
alla metà del cilindro a e g c. Noto,
se nel sito intervenisse un flesso contrario,
e che il numero di tali flessi si eguaglia
a quello dei punti, nè quali le curve
tagliano l'asse AB, detratto il binario.
Quando le forze applicate a punti analoghi
delle due metà di cilindro a e g c, b z k c
sempre eguali e contrarie, egli è mani-
festo che, rata pure loro, le somme dei momenti rispetti-
vamente al punto medio c delle forze
applicate ad una metà. ~~[illegible]~~
~~[illegible]~~. Le dette somme pertanto devono
essere amendue o positive, o negative, poichè
devono stare in equilibrio e fra loro, e
colla forza elastica del cilindro nel sito c.
Le due condizioni, che sembrano assolutamente
ripugnanti, si conciliano assieme, quando
le nominate somme si eguagliano a nulla,
come effettivamente succede * quindi andò
in accordo le riflessioni ovvero necessario,
che le nostre curve seghino l'asse almeno
in tre punti. Se le forze applicate alla
metà del cilindro a e g c hanno da forma-
re equilibrio relativamente al punto c,
fa di mestieri che siano parte positive, e
parte negative, ~~[illegible]~~ e questa circostanza
indispensabilmente richiede, che la curva
a e g c sia parte al di sotto, e parte al
di sopra dell'asse AB, e che per conseguenza
la intersechi almeno in un punto e.
Lo stesso dicasi della curva b z k c, la quale
deve tagliare l'asse AB almeno in un
punto z. Si aggiunga il punto ~~[illegible]~~ c,
~~[illegible]~~ e!

* a capo

e si troveranno tre per lo meno i punti di re-
voluzione.

Se sia $CQ = CP$, e cangisi il segno alla incognita z nella formola (n.º 5.)

$$\frac{4c^2 ddy}{b dz^2} \operatorname{sen} \frac{L}{nc} = \mp e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}} \sqrt{\cos \frac{L}{c}} - r \operatorname{sen} \frac{z}{c}, \text{ trovo}$$

$$\frac{4c^2 ddy}{b dz^2} \operatorname{sen} \frac{L}{nc} = \mp e^{-\frac{z}{c}} \pm e^{\frac{z}{c}} \sqrt{\cos \frac{L}{c}} - r \operatorname{sen} -\frac{z}{c}, \text{ ora}$$

ponendo in cambio di $-r \operatorname{sen} -\frac{z}{c}$ la quantità
eguale $r \operatorname{sen} \frac{z}{c}$,

$$\frac{4c^2 ddy}{b dz^2} \operatorname{sen} \frac{L}{nc} = \pm e^{\frac{z}{c}} \mp e^{-\frac{z}{c}} \sqrt{\cos \frac{L}{c}} + r \operatorname{sen} \frac{z}{c}.$$

Dunque i due insieme gli aggregati di comparazione della formola (n.º 5.), e della ultima,
si scoprono eguali, ma uno negativo in
riguardo all'altro. Esprime il primo la
somma dei momenti ~~relativamente~~ rispettivamente al
punto qualunque M delle forze applicate alla porzione
a M del cilindro, e del secondo viene dinota-
ta la somma dei momenti ~~per rapporto~~ in riguardo al
punto N delle forze applicate alla parte di
cilindro a b g C k N. I predetti aggregati
adunque sono eguali, e contrarj: ma
altresì eguali e contrarj, conforme ho notato
nel Corollario 1., sono gli aggregati di mo-
menti rispettivamente ai punti N, M
delle forze applicate alle porzioni di cilindro
a b g C k N, e b 7 k C g M; dunque passa
una perfetta uguaglianza fra le somme dei
momenti riferiti al punto M delle forze
applicate alle parti di cilindro da esso punto
M divise, ed essendo le nominate somme ancora
due contrarie, si equilibrano mutuamente,
di modo che il cilindro non può far moto
alcuno di giramento intorno qualsivoglia punto

In

M scelto ad arbitrio.

~~Cavallamente~~.

5. Si differenzj la formola (n. 5.) onde si a

(n. 6.) $\frac{2c^3 \partial^3 y}{6 \partial z^3} \operatorname{sen} \frac{L}{2c} = \pm e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}} \sqrt{\cos \frac{L}{c}} + 2 \cos \frac{z}{c}$

La somma delle forze applicate alla porzione di cilindro AM, che ha da essere proporzionale a $\frac{\partial^3 y}{-\partial z^3}$, deve serbare altresì la ragione della quantità $\pm e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}} \sqrt{\cos \frac{L}{c}} + 2 \cos \frac{z}{c}$. Si agguaglierà a nulla la detta somma quando si verifichi l'equazione $e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = \frac{\mp 2 \cos \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos \frac{L}{c}}}$, a cui appartengono le due radici $z = \pm \frac{L}{2}$. Infatti sostituito in luogo di z prima l'uno, indi l'altro valore posto in tutti e due i casi $e^{\frac{L}{2c}} + e^{-\frac{L}{2c}} = \frac{\mp 2 \cos \frac{L}{2c}}{\sqrt{\cos \frac{L}{c}}}$, formola che al numero XVII. ~~[illegible]~~ ho provato esser vera. La radice $z = \frac{L}{2}$ mi avvisa, che quando la porzione AM del cilindro agguaglia il nulla, si applica ad essa un aggregato nullo di forze. Dalla radice $z = -\frac{L}{2}$ si viene additato equivalere al nulla il complesso delle forze applicate all'intero cilindro AB, il che interviene mentre le forze negative pareggiano le positive.

Si cava la importantissima conseguenza, che ancora quando il cilindro AB si adatta alle curve del secondo genere, dalle quali l'asse AB viene tagliato in un numero impari di punti, si adempiono le due proprietà che esso non possa rivolgersi intorno qualsivoglia punto

punto M, e che sia del pari tirato da due somme di forze eguali, e contrarie. Quindi le forze MH eguali ed opposte a queste, [illegible] tentano di farlo reciprocare, lo tengono immobile nel sito a l g l k 7 6, e tolte di mezzo esse forze, altro movimento che quello di vibrazione non gli è permesso di poter acquistare.

~~Problema~~.

Ridurre a computo la grandezza, o sia l'angolo $\frac{\alpha}{c}$.

XIX. Avendo nuovamente per mano la formola $(1a)^{ma}\, e^{\frac{\alpha}{c}} = \dfrac{1 \mp \sin\frac{\alpha}{c}}{\cos\frac{\alpha}{c}}$, e fatta la riflessione che tanto $e^{\frac{\alpha}{c}}$, quanto ~~[illegible]~~ $1 \mp \sin\frac{\alpha}{c}$ sono sempre quantità positive, ne inferisco tal conseguenza, che sotto tal classe deve parimente riporsi $\cos\frac{\alpha}{c}$. Fatto centro in C, col raggio CA = 1 ~~[illegible]~~ (fig. 45.) descriverò il circolo ABab, il quale dalle linee Aa, Bb venga partito in quattro quadranti. Se il coseno Ce dell'angolo AC7, e pure il coseno Cg dell'angolo ACf avranno ad essere positivi, il che succede, quando la loro direzione è da C verso A, egli è necessario, che i lati C7, Cf cadano dentro i quadranti ACB, ACb. Da la ~~[illegible]~~ qual cosa ~~[illegible]~~ l'angolo $\frac{\alpha}{c}$ potrà avere infiniti valori, quali stavanno o fra l'angolo nullo e l'angolo retto, o fra i tre e i quattro retti o fra i quattro e i cinque, o fra i sette e gli otto o fra gli otto e i nove, o fra gli undici e i dodici o fra i dodici e i tredici &c. Si esprima colla lettera q o sia il quadrante di circolo, il cui raggio = 1, l'angolo retto, e chiamato φ

quelli

quelli angolo minore del retto; per cui: l'angolo $\frac{\alpha}{c}$ differisce da un determinato numero di retti, ci n.° presenteranno le seguenti equazioni

I. $\frac{\alpha}{c} = g - \varphi$

II. $\frac{\alpha}{c} = 3g + \varphi$

III. $\frac{\alpha}{c} = 5g - \varphi$

IV. $\frac{\alpha}{c} = 7g + \varphi$

V. $\frac{\alpha}{c} = 9g - \varphi$

VI. $\frac{\alpha}{c} = 11g + \varphi$

VII. $\frac{\alpha}{c} = 13g - \varphi$

Le formole, cui stanno a lato i numeri impari, assegnano all'angolo $\frac{\alpha}{c} = ACF$ valori tali, che il lato CF cade sempre dentro il quadrante ACB. All'incontro le formole contrassegnate da numeri pari attribuiscono all'angolo $\frac{\alpha}{c} = ACf$ quelle grandezze, mercè le quali il lato Cf è costantemente compreso dentro il quadrante ACb.

Al punto A del circolo ABab conduco la tangente indefinita HAh, e divisi per metà ne' punti F, f i due angoli BCF, bCf, ciascun de' quali viene dinotato dalla specie φ, delineo le secanti CFH, Cfh. Descritte le linee FG, fg parallele a Bb, FN, fn parallele ad Aa, si tirino le rette FB, Fb, fb, fB.

Schediasma XI.

Insistendo allo stesso arco ZB i due angoli ZGB alla circonferenza, ZCB alla circonferenza al centro, si corrispondono nella ragione 1 : 2; ma per la costruzione l'angolo ZCB è doppio dell' HCB; dunque passa eguaglianza tra gli angoli ZGB, HCB. Si osservi eguagliarsi gli angoli altresì HCB, CHA, e si deduca l'eguaglianza degli angoli ZGM, CHA nei triangoli rettangoli ZGM, CHA, i quali perciò sono simili; e si somministreranno l'analogia

GM : MZ :: HA : AC.

Giacchè ZG = MC è il seno dell' angolo $ACZ = \frac{L}{c}$, scopriremo $GM = 1 + \text{sen}\frac{L}{c}$. Abbiamo inoltre $MZ = \cos\frac{L}{c}$, come altresì $HA = \cot\frac{1}{2}\varphi$, cioè a dire la linea HA eguale alla cotangente dell' angolo BCD metà del $BCZ = \varphi$.

Ecco adunque l'espressione analitica della sovrapposta analogia

$1 + \text{sen}\frac{L}{c} : \cos\frac{L}{c} :: \cot\frac{1}{2}\varphi : 1$,

da cui deriva l'equazione

$\frac{1 + \text{sen}\frac{L}{c}}{\cos\frac{L}{c}} = \cot\frac{1}{2}\varphi$. Abbiamo superiormente notato, che la formola $e^{\frac{L}{c}} = \frac{1 + \text{sen}\frac{L}{c}}{\cos\frac{L}{c}}$ riguarda alla equazione (20.) propria delle curve del secondo genere, che tagliano l'asse AB (fig. 20.) in un numero impari di punti. Si ricava pertanto,

dice

che a tali curve servono gli angoli ACγ (Fig. 98), il cui lato Cγ cade dentro il quadrante ACB, e che si eguagliano ad angoli retti 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... meno l'angolo φ.

Collo stesso progresso dimostrerò verificarsi l'analogia Bm : mf :: hA : AC. Noto, che essendo negativo il seno gf = Cm dell'angolo ACf = $\frac{L}{c}$, la linea Bm si eguaglia ad $1 - \operatorname{sen}\frac{L}{c}$ e quindi il premesso analogismo si esprimerà così

$$1 - \operatorname{sen}\frac{L}{c} : \cos\frac{L}{c} :: \cot\tfrac{1}{2}\varphi : 1$$

e ne risulterà l'equazione $\frac{1 - \operatorname{sen}\frac{L}{c}}{\cos\frac{L}{c}} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi$. Fatta l'avvertenza che dalla equazione $e^{\frac{L}{c}} = \frac{1 - \operatorname{sen}\frac{L}{c}}{\cos\frac{L}{c}}$ deriva la formola 19.na spettante alle curve del primo genere, che intersecano l'asse AB (Fig. 19) in un numero pari di punti, si deduca servire a sì fatte curve gli angoli ACf (Fig. 93), il cui lato Cf sta dentro il quadrante ACG, e che pareggiano angoli retti 3, 7, 11, ... e più l'angolo φ.

Le cose dette ci mostrano a dito adempiersi l'equazione $e^{\frac{L}{c}} = \frac{1 \mp \operatorname{sen}\frac{L}{c}}{\cos\frac{L}{c}} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi$, la quale comprende le curve del primo e del secondo genere. Facendo

partito dai numeri ai logaritmi, e ridurremmo a memoria essere $la = 1$ troveremo $\frac{L}{c} = l\cos\frac{1}{2}\varphi$

XX. Prima di passar oltre egli è di uopo provare che il valore $\frac{L}{c} = g - \varphi$ non solo conviene alle vere una curva del secondo genere, alla quale sia concesso adattarsi ad un cilindro, che oscilla. Essendo l'angolo $\frac{L}{c} = g - \varphi$ minore di un retto, si scopre positivo il seno dell'angolo $\frac{L}{2c}$. Conforme a ciò, che ho avvertito al numero XIV i segni superiori della formola (20) idea suppongono sen $\frac{L}{2c}$ quantità positiva. Nel caso adunque, che presentemente si esamina, avremo $\frac{2y}{b} = \frac{e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}{2\,\text{sen}\frac{L}{2c}} + \frac{\text{sen}\frac{z}{c}}{\text{sen}\frac{L}{2c}}$.

Posto $\frac{L}{c} = g - \varphi$ non può l'ordinata y pareggiare il nulla, salvo che nella ascissa che sia $z = 0$. Quindi non si adempirebbe quello, che nel corollario 4 del numero XXIII ho dimostrato dover succedere, che la curva elastica (fig. 10.) a e g c k 7 6 interseca l'asse AB almeno in tre punti. Sia primieramente z maggiore del nulla, e giacchè il massimo valore, che possa attribuirsi a z, si è $\frac{L}{2}$, si scorgeremo esser sempre positivo $\frac{L}{2}$; ci accorgeremo esser sempre positivo sen $\frac{z}{c}$, come altresì il termine $\frac{\text{sen}\frac{z}{c}}{\text{sen}\frac{L}{2c}}$. Essendo $l = 2,3\ 1\ 4\ 2\ 6\ 1\ 4$, scopriremo le due quantità $e^{\frac{z}{c}}$ $e^{-\frac{z}{c}}$ l'una maggiore e l'altra minore dell'unità, ed inferiremo, che il termine $\frac{e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}}\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}{2\,\text{sen}\frac{L}{2c}}$

si mantiene positivo costantemente.
Conchiuderei, che all'ascissa z positiva corrisponderebbe l'ordinata y affermativa, essendo $\frac{zy}{b}$ eguale alla somma di due termini sempre positivi, e che contro la natura della nostra equazione la curva $Cgea$ cadrebbe tutta al di sotto del semiasse CA, nè lo taglierebbe in alcun punto medio fra C, ed A.

In simil guisa dimostrerò, che supponendo z minore del nulla, vale a dir negativa, sarebbe sempre negativa l'ordinata y, e stando tutta la curva $Ck76$ al di sopra del semiasse CB, non lo intersecherebbe in veruno punto medio fra C, e B.

Escluso il valore $\frac{L}{c} = g - \varphi = l \cot \frac{1}{2}\varphi$, registro nella seguente tavola quelli, che sono confacenti alle equazioni (19), e (20), ossia alle curve del primo, e del secondo genere.

I. $\frac{L}{c} = 3g + \varphi = l \cot \frac{1}{2}\varphi$

II. $\frac{L}{c} = 5g - \varphi = l \cot \frac{1}{2}\varphi$

III. $\frac{L}{c} = 7g + \varphi = l \cot \frac{1}{2}\varphi$

IV. $\frac{L}{c} = 9g - \varphi = l \cot \frac{1}{2}\varphi$

V. $\frac{L}{c} = 11g + \varphi = l \cot \frac{1}{2}\varphi$

VI. $\frac{L}{c} = 13g - \varphi = l \cot \frac{1}{2}\varphi$

Si trova il logaritmo iperbolico della cotangente di un qualunque angolo prendendo il

Schediasma XI.

il logaritmo delle Tavole, sottraendo da questo il logaritmo del seno retto, e moltiplicando il residuo per 2,3025851. (f) Per alleggerir una tal fatica torna in acconcio il nuovamente ricorrere ai logaritmi. Sia u il logaritmo iperbolico della cotangente dell'angolo $\frac{1}{2}\varphi$. Prendasi dalle Tavole il logaritmo d'essa cotangente, e fatta la detrazione del logaritmo del sin retto, quello che avanza si chiami v. Essendo adunque $u = 2,3025851 . v$, avremo prendendo i logaritmi da nelle Tavole dei numeri $lu = lv + 0,3622157$;

(f) I logaritmi dei seni, e delle tangenti, e quelli dei numeri appartengono alla stessa logistica, e differiscono solo nel primo numero, a cui si adegua il logaritmo nullo. I primi logaritmi anno per primonumero $\frac{1}{100000}$, cioè a dire si unità divisa pel sino retto, e quindi alla unità tocca il logaritmo 5,0000000. I secondi logaritmi accettano siccome primonumero l'unità. Si tragga la conseguenza, che si fara passaggio da quei logaritmi a questi scemando per 5,0000000 i logaritmi delle Tavole dei seni. Si chiamino T, t le cotangenti l'una presa dalle Tavole, e l'altra relativa ad un circolo di raggio 1 ambe corrispondenti allo stesso angolo $\frac{1}{2}\varphi$, le quali devono stare come i raggi 100000 : 1. Avremo per tanto $\frac{T}{100000} = t$, e giacchè $1 : \frac{1}{100000} :: T : t$, sarà passando ai logaritmi $l\frac{1}{100000} + lT - l1 = lt$. Ma nelle Tavole dei seni $l\frac{1}{100000} = 0$, $l1 = 5,0000000$; dunque $lT - 5,0000000 = lt$. Ho fatta l'osservazione, che si fa passaggio dai logaritmi delle Tavole de' seni a quelli dei numeri minorando i primi per 5,0000000. A norma di ciò se lT si seguiti a prendere nelle Tavole dei seni, e lt si prenda nelle Tavole dei numeri avremo $lT - 10,0000000 = lt$.

Trametteremo

~~Supponiamo tale logaritmo, ed essendo~~ e già che $u = ng \pm \varphi$, sarà ancora $lu = l\,\overline{ng \pm \varphi}$. Per determinare quest'ultimo logaritmo l'angolo φ deve esprimersi in parti del raggio nella stessa guisa, che parimente in parti del raggio si contrassegna l'angolo retto $g = 1,5707963$. Otteremo l'intento, se ridurremo l'angolo φ in minuti secondi, e dal logaritmo di cotal numero sottraremo costantemente $5,3144251$ (§). Così ne risulterà $l\varphi$, il quale facendo ritorno ai numeri ci somministrerà il valore dell'angolo φ, ~~dal quale~~ cui dipende quello dell'angolo φ. Ho detto, che dal $\frac{L}{c} = u = ng \pm \varphi$. Ho detto, che dal

logaritmo

Tramutavano i logaritmi comuni in iperbolici ~~[illegible]~~ premessa la riflessione, che riconoscen~~[illegible]~~do entrambi per protonumero l'unità, i logaritmi di un qualunque numero serbano la proporzione dei logaritmi di un numero dato. Ora i logaritmi comune, ed iperbolico del numero 10 sono 1; 2,3025851; dunque facendo

$1 : 2,3025851 :: lT - 10,0000000 :$

$(lT - 10,0000000) \cdot 2,3025851$ il quarto termine esprimerà il logaritmo iperbolico cercato conforme alla regola da me data.

(§) Abbiamo notato essere l'angolo retto $g = 1,5707963$ parti del raggio $= 1$. Lo stesso angolo si eguaglia a secondi 324000. Sia N il numero dei minuti secondi, onde è composto l'angolo φ, e dalla analogia $324000 : 1,5707963 :: N : \varphi$ ricaveremo il valore dell'angolo φ espresso in parti del raggio, vale a dire $\frac{N \cdot 1,5707963}{324000} = \varphi$, e facendo tramuto ai logaritmi

$lN + l1,5707963 - l324000 = l\varphi$. Ma $l32$

logaritmo del numero dei secondi componenti l'angolo φ, deve sottrarsi 5,3144251. Conciossiaché nei computi, che siam per fare, avremo sempre il primo logaritmo minore del minuendo si accresca la caratteristica di quello per 10, e fatta poscia la sottrazione ne proverrà un logaritmo, la cui caratteristica supererà la vera per 10. Questa aumentazione ci addita, che in cambio di scrivere il numero corrispondente al nostro logaritmo nella sede che richiederebbe la caratteristica risultante dalla sottrazione, lo dobbiamo trasportare dieci sedi all'indietro.

XXII. Fatte queste necessarie avvertenze per agevolare e dedurre i calcoli rettamente, non sarà difficile l'assegnare col mezzo delle approssimazioni il valore dell'angolo φ relativamente a qualsivoglia ~~genere~~ specie di oscillazioni. Imperocché attribuendo a φ alquanti valori ad arbitrio, e determinando col computo $ng \pm \varphi$, e $l\cot\frac{1}{2}\varphi$, si scopriranno i limiti dentro de' quali sta il vero valore dell'angolo φ, e se ~~gue~~ tali limiti sono troppo rimoti, se ne troveranno de' più vicini, e da questi finalmente si dedurrà il giusto valore dell'angolo mentovato. Pongo sotto gli occhi di chi legge i calcoli sino al num.ro VI, e noto essere inutile il continuarli più avanti, atteso che l'angolo φ divien così menomissimo, che si può fisicamente supporre $\frac{\alpha}{c} = ng$.

$l\,324000 = 5,5105450$; $l\,1,5707963 = 0,1961199$, e $5,5105450 - 0,1961199 = 5,3144251$; dunque $lN - 5,3144251 = l\varphi$, come dovea dimostrarsi.

Computo per il num.° I. $\frac{L}{c} = 3g + \varphi = l \cot \frac{1}{2}\varphi$ Schediasma XI. [illegible]

$\varphi = 1^{\circ}, 0', 40''$	$\varphi = 1^{\circ}, 0', 41''$
in min. sec. = 3640	in min. sec. = 3641
log = 3,5611014	log = 3,5612207
sottra 5,3144251	sottra 5,3144251
$l\varphi$ = 8,2466763	$l\varphi$ = 8,2467956
φ = 0,0176472	φ = 0,0176521
$3g$ = 4,7123890	$3g$ = 4,7123890
$\frac{L}{c} = 3g + \varphi$ = 4,7300362	$\frac{L}{c} = 3g + \varphi$ = 4,7300411
$\frac{1}{2}\varphi = 30', 20''$	$\frac{1}{2}\varphi = 30', 20\frac{1}{2}''$
$l \cot \frac{1}{2}\varphi$ = 12,0543425	$l \cot \frac{1}{2}\varphi$ = 12,0542232
v = 2,0543425	v = 2,0542232
lv = 0,3126724	lv = 0,3126476
aggiungi 0,3622157	aggiungi 0,3622157
lu = 0,6748881	lu = 0,6748633
$\frac{L}{c} = u$ = 4,7302944	$\frac{L}{c} = u$ = 4,7300240
errore = + 2582	errore = − 171
altro errore = − 171	
differenza = 2753	

Differenza fra i due valori dell' angolo $\varphi = 1''$. Facciasi come $2753 : 2582 :: 1'' : \frac{2582''}{2753} = 0,93788''$, ed il quarto termine si uguaglierà a quella quantità, che aggiunta a $1^{\circ}, 0', 40''$ mi dà il vero valore dell' angolo

$\varphi = 1^{\circ}, 0', 40,93788''$

in min. sec = 3640,93788''

log = 3,5612135

sottra 5,3144251

$l\varphi$ = 8,2467884

φ = 0,0176518

$3g$ = 4,7123890

$\frac{L}{c} = 3g + \varphi$ = 4,7300408 grandezza adequatamente giusta dell' angolo $\frac{L}{c}$ espresso in parti del raggio = 1.

Schediasma XI

Computo per il num.ro II. $\frac{\mathcal{L}}{c} = sg - \varphi = l\,cot.\,\frac{1}{2}\varphi$.

$\varphi = 0, 2', 40''$		$\varphi = 0, 2', 41''$	
in min. sec =	160	in min. sec	161
log.	2,2041200	log.	2,2068259
sottra	5,3144251	sottra	5,3144251
$l\varphi$ =	6,8896949	$l\varphi$ =	6,8924008
φ =	0,0007757	φ =	0,0007806
sg	7,4539416	sg =	7,4539416
$sg-\varphi$ =	7,4532059	$\frac{\mathcal{L}}{c}$ $sg-\varphi$ =	7,4532010

$\frac{1}{2}\varphi$ =	$0, 1', 20''$	$\frac{1}{2}\varphi$	$0, 1', 20\frac{1}{2}''$
$l\,cot.\,\frac{1}{2}\varphi$ =	13,4113351	$l\,cot.\,\frac{1}{2}\varphi$ =	13,4086292
v =	3,4113351	v =	3,4086292
lv =	0,5329244	lv =	0,5325798
aggiungi	0,3622157	aggiungi	0,3622157
lu =	0,8951401	lu =	0,8947955
$\frac{\mathcal{L}}{c} = u$ =	7,8544697	$\frac{\mathcal{L}}{c} = u$ =	7,8486600
errore = +	16834	errore = −	45410
altro errore =	45410		
differenza	62244		

Differenza fra i due valori dell'angolo $\varphi = 1''$. Facciasi come $62244 : 16834 :: 1'' : \frac{16834}{62244}$

$= 0,27050''$ quantità da aggiungersi a $0, 2', 40''$ onde si abbia il giusto valore dell'angolo

$\varphi = 0, 2', 40,27050''$

in min. sec	160,27056
log =	2,2048536
sottra	5,3144251
$l\varphi$ =	6,8904285
φ =	0,0007770
sg =	7,4539416

$\frac{\mathcal{L}}{c} = sg - \varphi =$ 7,4532046 misura finalmente esatta dell'angolo $\frac{\mathcal{L}}{c}$ espressa in parti del raggio.

Computo per il num.° III. $\frac{\alpha}{c} = 7g + \varphi = l\,cot.\,\tfrac{1}{2}\varphi$

$\varphi = 0,\ 0,\ 6''$
log. = 0,7761512
sottra 5,3144251

$l\varphi$ = 5,4637261
φ = 0,0000291
$7g$ = 10,9955743

$\frac{\alpha}{c} = 7g + \varphi$ = 10,9956034

$\varphi = 0,\ 0,\ 7''$
log. = 0,8450980
sottra 5,3144251

$l\varphi$ = 5,5306729
φ . 0,0000339
$7g$. 10,9955743

$\frac{\alpha}{c}$ $7g + \varphi$ = 10,9956082

$\tfrac{1}{2}\varphi = 0,\ 0,\ 3''$
$l\,cot.\,\tfrac{1}{2}\varphi$ - 14,4373039
v - 4,4373039
lv = 0,6470034
aggiungi 0,3622157

lu = 1,0468191
$\frac{\alpha}{c} = u$ = 11,1343051
errore = + 1427017
l'altro errore = - 113529
Differenza = 1540546

$\tfrac{1}{2}\varphi = 0,\ 0,\ 3\tfrac{1}{2}''$
$l\,cot.\,\tfrac{1}{2}\varphi$. 14,7703571
v = 4,7703571
lv = 0,6785509
aggiungi 0,3622157

lu = 1,0407666
$\frac{\alpha}{c} = u$ - 10,9841553
errore = - 113529

Differenza tra i due valori dell'angolo $\varphi = 1''$. Facciasi come 1540546 : 1427017 :: $1''$: $\frac{1427017''}{1540546} = 0,926306\overline{0}''$ porzione di secondo, che aggiunta quanto basta giusta la nostra misura, dell'angolo a $0,\ 0,\ 6''$ mi somministra

$\varphi = 0,\ 0',\ 6,926306\overline{0}''$

log. = 0,8405017
sottra 5,3144251

$l\varphi$ = 5,5260766
φ = 0,0000336
$7g$ = 10,9955743

$\frac{\alpha}{c} = 7g + \varphi$ = 10,9956079 grandezza fisicamente esatta dell'angolo $\frac{\alpha}{c}$ espresso in parti del raggio. Si troverebbe con maggior precisione il valore dell'angolo $\varphi = 6,920285\tfrac{1}{2}''$ supponendo $\frac{\alpha}{c} = u = 10,9956079$, ed indi reprocedendo con metodo contrario a quello da me tenuto sino a tanto che ci si presenta il valore di $\tfrac{1}{2}\varphi$ espresso in secondi. Nei numeri seguenti a cagione della somma piccolezza dell'angolo φ mi [illegible] di me tale artifizio.

124. Computo per il n.^{ro} IV. $\frac{\alpha}{c} = 9\mathcal{g} - \varphi = l\cot\frac{1}{2}\varphi$ Schediasma XI.

$\varphi = 0, 0, \frac{2}{7}''$

log. = − 0,5440680

sottra 5,3144251

− 5,8584931

aggiungi 10,0000000

$l\varphi$ 4,1415069

φ = 0,000001385

$9\mathcal{g}$ 14,13716694

$\frac{\alpha}{c} = 9\mathcal{g} - \varphi$ = 14,13716556

$\frac{1}{2}\varphi = 0, 0, \frac{1}{7}''$

$l\cot\frac{1}{2}\varphi$ = 16,1595232

v = 6,1595232

lv = 0,7895471

aggiungi 0,3622157

lu = 1,1517628

$\frac{\alpha}{c} = u$ = 14,18262817

errore = + 45662661

altro errore = − 10844987

differenza = 1541 51848

$\varphi = 0, 0, \frac{1}{3}''$

log = − 0,4771212

sottra 5,3144251

− 5,7915463

aggiungi 10,0000000

$l\varphi$ = 4,2084537

φ = 0,000001616

$9\mathcal{g}$ = 14,13716694

$\frac{\alpha}{c} = 9\mathcal{g} - \varphi$ = 14,13716532 5

$\frac{1}{2}\varphi = 0, 0, \frac{1}{6}''$

$l\cot\frac{1}{2}\varphi$ = 16,0925764

v = 6,0925764

lv = 0,7848010

aggiungi 0,3622157

lu = 1,1470167

$\frac{\alpha}{c} = u$ = 14,02867613

errore = − 10844987

Differenza tra i due valori dell'angolo φ espresso in parti del raggio = 231. Facciasi come 1541 51848 : 45662661 :: 231 : 68 quantità che aggiunta a 1385 mi dà l'aggiustato valore dell'angolo = 0,0000014 53. Sottraendo questo da $9\mathcal{g}$, resta φ = 0,0000014 53. Pongasi dunque

$\frac{\alpha}{c} = 9\mathcal{g} - \varphi$ = 14,13716 5466

$\frac{\alpha}{c} = u$ = 14,1371 65466

lu = 1,1503623

sottra 0,3622157

lv 0,7881466

v = 6,1396921

$l\cot\frac{1}{2}\varphi$ = 16,1396921

$\frac{1}{2}\varphi$ = 0,1495316''

φ = 0,2990633'' grandezza esattissima dell'angolo φ espresso in secondi.

Computo per il num.ro V. $\frac{\mathcal{L}}{c} = 22\, g + \varphi = l\, \cot.\, \frac{1}{2}\varphi$

Riducendo a calcolo nel presente, e nel seguente numero il valore dell' angolo $\frac{\mathcal{L}}{c}$ riescirà n.e come relativamente minimo l'angolo φ.

$\frac{\mathcal{L}}{c} = u = 17,2787596$

$l u = 1,2375125$

sottra $0,3622157$

$l v = 0,8752968$

$v = 7,5046898$

$l \cot. \frac{1}{2}\varphi = 17,5040691$

$\frac{1}{2}\varphi = 0,006461837''$

$\varphi = 0,012923673''$ minima

adequatamente giusta dell' angolo picciolissimo φ espresso in secondi

---

Computo per il num.ro VI. $\frac{\mathcal{L}}{c} = 13\, g - \varphi = l\, \cot.\, \frac{1}{2}\varphi$

$\frac{\mathcal{L}}{c} = u = 20,4203522$

$l u = 1,3100632$

sottra $0,3622157$

$l v = 0,9478475$

$v = 8,8684449$

$l \cot \frac{1}{2}\varphi = 18,8684449$

$\frac{1}{2}\varphi = 0,000279242''$

$\varphi = 0,000558483''$ valore

prossimamente esatto dell' angolo φ espresso in parti di minuto secondo.

Dispongo ordinatamente nella seguente Tavola i sei determinati valori dell' angolo $\frac{\mathcal{L}}{c}$ espresso in parti del raggio

Valori delle angoli $\frac{\alpha}{c}$ espressi in parti del raggio = 1
scheda in cima XI.

I. $\frac{\alpha}{c} = 3g + \varphi =$	4,7300406	log. 0,6748648
II. $\frac{\alpha}{c} = 5g - \varphi =$	7,8532046	log. 0,8950469
III. $\frac{\alpha}{c} = 7g + \varphi =$	10,9956079	log. 1,0412192
IV. $\frac{\alpha}{c} = 9g - \varphi =$	14,1371655	log. 1,1503623
V. $\frac{\alpha}{c} = 11g + \varphi =$	17,2787596	log. 1,2375125
VI. $\frac{\alpha}{c} = 13g - \varphi =$	20,4203522	log. 1,3100632
&c.		&c.

~~Problema VI.~~

~~[illegible]~~

Determinare il numero di vibrazioni fatte da un cilindro nel tempo di un minuto secondo rispettivamente a ciascun modo, in ~~[illegible]~~ cui può oscillare.

XXIII. Si chiami m il ~~numero~~, a cui si eguaglia l'angolo $\frac{\alpha}{c}$, onde si abbia $\frac{\alpha}{c} = m$, e conseguentemente $\alpha = mc$. Ed essendo, conciossiachè al numero XIII. ~~[illegible]~~ si è ottenuto

$c^4 = \frac{e\alpha f}{M}$, si scoprirà $\alpha^4 = \frac{m^4 e\alpha f}{M}$,

e perciò $f = \frac{M\alpha^3}{m^4 e}$. Abbiamo stabilito al fine del ~~problema~~ numero III. $c = \frac{kvM^2}{g^2\alpha^2}$.

Fatta la surrogazione di un tal valore avremo $f = \frac{\alpha^5 g^2}{km^4 . Mv}$. Dalla prima equazione esprimente la lunghezza f del pendolo semplice isocrono impariamo competere alla lunghezza la proporzione composta diretta delle masse e del cubo delle lunghezze dei cilindri, ed inversa del quadrato-quadrato del numero m, e della forza c, il cui valore si determina per mezzo degli esperimenti

esperimenti, conforme ho insegnato nei numeri V. VI. e VII. ~~Dostdovuncdd~~. La seconda equazione ci addita, che la lunghezza f del pendolo semplice isocrono sta in ragione composta della diretta della quarta potenza delle lunghezze dei cilindri e del quadrato della loro gravità specifica g, ed in reciproca del quadrato quadrato del numero m, della massa M, e della rigidità v della materia, onde sono formati. Non ho fatta menzione del coefficiente k, perchè ~~conformemente~~ ho già notato nel numero III. ~~[illegible]~~ parimente è sempre costante in tutti i cilindri.

Quando la gravità specifica eguale alla massa divisa per il volume, ed essendo la base di un cilindro proporzionale al quadrato del suo diametro, avremo g come $\frac{M}{LD^2}$, e per conseguenza M come gLD^2. Surrogati nella nostra seconda equazione della lunghezza f del pendolo semplice isocrono prima in cambio di g, poscia in cambio di M i valori proporzionali, avremo

$$f \text{ come } \frac{L^3 M}{m^4 D^4 v}, \quad f \text{ come } \frac{L^4 g}{m^4 D^2 v}.$$

Dalle quattro equazioni generali si deducono agevolmente le particolari. Se per esempio due cilindri siano composti della stessa materia, e si stirino similmente, ripiegandosi in curve, che taglino le asse in numero eguale di nodi, saranno costanti i valori delle quantità g, v, m, e si scoprirà f come $\frac{L^4}{D^2}$, cioè a dire le lunghezze dei pendoli semplici isocroni in ragione composta diretta quadruplicata delle lunghezze dei cilindri, ed

ed inversa duplicata dei loro diametri.

XXIV. Sia h la lunghezza del pendolo semplice, che nel fare una vibrazione s'impiega un minuto secondo, di modo che sia $h = 3,1665$ piedi del Reno, o pure $h =$ p.^{di} 3 linee 8,53 del piede Real di Parigi, e già che le durate delle oscillazioni serbano la ragione sudduplicata delle lunghezze dei pendoli, il tempo d'una vibrazione di un cilindro s'eguaglierà a secondi $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{h}} = \frac{1}{m^2}\sqrt{\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{a}\cdot ML^3} =$

$\frac{1}{m^2}\sqrt{\frac{1}{kh}\cdot\frac{L^{5}g}{M}\cdot\frac{1}{v}}$. Conseguentemente avremo il numero delle vibrazioni fatte dal cilindro in un minuto secondo, o sia il suono di esso cilindro, che io chiamo $S = \frac{m^2}{1}\sqrt{\frac{ha}{ML^3}} = m^2\sqrt{khv\cdot\frac{M}{L^{5}g}}$.

(a capo) Se nella equazione seconda in vece di g, e di M sostituiremo i valori proporzionali $\frac{M}{LD^2}$, gLD^2, ci si presenterà S come $m^2\sqrt{\frac{vD^4}{ML^3}}$, come $m^2\sqrt{\frac{vD^2}{L^4 g}} = \frac{m^2 D}{L^2}\sqrt{\frac{v}{g}}$.

La formola $S = m^2\sqrt{\frac{ha}{ML^3}}$ serve per iscoprire il preciso numero di vibrazioni, che fa un cilindro nel tempo di un minuto secondo, potendosi determinare il valore della forza a col mezzo degli esperimenti, la grandezza della massa M per via del peso, la lunghezza L con diligente misura, ed essendo cognita la lunghezza h del pendolo a secondi, ed il numero m, ~~secondo~~ con forme che il cilindro si vibra piuttosto in un modo, che nell'altro.

L'ultima

L'ultima maniera, colla quale si contrassegnano i suoni dei cilindri, cioè S come $\frac{m^2 D}{L^2}\sqrt{\frac{r}{g}}$ ci mette sotto degli occhj nel suo più semplice aspetto la legge, che ci regola i suoni stessi; i quali stanno in proporzione composta diretta duplicata del numero m, semplice dei diametri D dei cilindri, dimezzata della rigidità r della materia che li compone, e reciproca duplicata delle loro lunghezze L, e dimezzata delle loro gravità specifiche g.

¶ Corollarj, che si deducono dalla formula S come $\frac{m^2 D}{L^2}\sqrt{\frac{r}{g}}$.

XXV. Dal predetto ultimo modo di esprimere i suoni dei cilindri si inferiscono parecchi corollarj.

1. Caso subito ec.

~~Corollario I~~

1. Cosa merita quella conseguenza, che tra le cose aria di paradosso, e da taluno non si crederebbe, se non venisse confermata dalla esperienza, ed è che essendo il resto pari, i cilindri sono tanto più acuti, quanto il diametro loro è maggiore. Si tolle quivi però altro la apparente ripugnanza qualora si rifletta, che la forza elastica cresce all'aumentarsi del diametro D, avendola (~~[illegible]~~) dimostrata proporzionale a $D^4 r$ nel numero III. * ~~e di più che cresce proporzionalmente che ad una forza elastica più grande due suoni più acuti~~.

* e cresce a proporzione più di quello si ingrandisca la massa M, laonde ~~[illegible]~~ che nella ipotesi, che precedentemente si considera, abbiamo $S = m^2\sqrt{\frac{h e}{M L^3}}$ proporzionale a D.

~~Corollario II~~

2. Poichè [Stante] due cilindri oscillino similmente adattandosi a curve, che contengano le asse in numero eguale di punti, sarà costante la specie m, e si avrà S come $\frac{D}{L^2}\sqrt{\frac{r}{g}}$

~~Corollario III~~

3. Nella stessa supposizione troveremo la rigidità r come $\frac{S^2 L^4 g}{D^2}$. Col mezzo dei suoni dunque si può sco-

-prire

prove la proporzione fra le rigidità di varie materie, le quali rigidità, mentre i cilindri sieno egualmente lunghi, e grossi, averanno la ragione $S^2 g$, che si compone della duplicata dei suoni, e della semplice delle gravità specifiche. Queste mie sperimentazioni si accordano con ciò, che ha dimostrato il Co. Jacopo mio Padre nella sua Dissertazione intorno le leggi delle forze elastiche inserita nel p.mo Tomo I. dei Commentarj dell'Accademia Bolognese, e ristampata nel Tomo III. delle sue Opere. 6.

~~Corollario~~:

4. Se due cilindri, che si trovano similmente, saranno formati della stessa materia, onde sieno egualmente rigidi, ed egualmente gravi in ispecie, oppure se in cui le rigidità staranno come le gravità specifiche, staranno i suoni S come $\frac{D}{L^2}$, cioè a dire i suoni in ragione composta, diretta dei diametri dei cilindri, ed inversa duplicata delle loro lunghezze

~~Corollario~~

5. Se inoltre i due cilindri saranno simili, averanno S come $\frac{1}{L}$, oppure S come $\frac{1}{D}$, vale a dire i suoni dei cilindri simili si riguarderanno nella ragione reciproca dei lati omologhi. Questa legge abbraccia tutti i corpi simili della stessa materia formati, non eccettuate le corde, per l'esatta similitudine delle quali non basta, che i diametri sieno alle lunghezze proporzionali, ma bisogna altresì, che le loro particelle sieno egualmente rigide, il che interviene quando le corde si tendono con forze attaccatevi in ragione delle loro basi. Cosa maravigliosa

si è

sì è, che si dà un caso, nel quale si uniscano in un solo i canoni ~~totalmente~~ fra loro diversi; donde ricevono prendono regola i suoni di varj corpi differenti nella struttura, e nelle circostanze, che nelle loro vibrazioni influiscono.

Caratteristica.

6. I varj suoni dello stesso cilindro si riferiscono nella proporzione dei quadrati n.i. Quando $m = nq \pm q$, se gli angoli φ fossero talmente piccoli, che si potessero totalmente trascurare; abbraccerebbero i suoni il rapporto dei quadrati n.i, e già che n si uguagli in serie ai numeri impari 3, 5, 7, 9, 11, 13 &c., i predetti suoni starebbero come i quadrati di tali numeri cioè a dire come 9, 25, 49, 81, 121, 169 &c. Messi a computo gli angoli φ, e principalmente il più grande, che corrisponde al n.ro I, si trovano alterate per poco più di mezzo comma $\frac{81}{80}$, il cui log.mo 53950, le proporzioni 9 : 25, 9 : 49, 9 : 81 &c., nelle quali il suono grave 9 paragonasi cogli acuti. Le altre proporzioni riescono presso che giuste imperocchè il maggior divario, ~~cioè~~ quello che modifica la ragione 25 : 49, si uguaglia in logaritmi a 445 parti 6.ma del comma. // Registro nella seguente tavola i sei suoni, che rende un cilindro, mentre oscillando si adatta a quelle curve, che tagliano le asse in 2, 3, 4, 5, 6, 7 punti. Paragono i suoni acuti col grave, noto le alterazioni dei rapporti 9 : 25, 9 : 49, 9 : 81 &c., ed unisco a quali semplici proporzioni si accostino i mentovati rapporti modificati. (// a capo.)

Ragione del suono più grave di un cilindro co' suoni acuti

Quantità proporzionali ai suoni — Loro logaritmi

I. $m^2 = \overline{3g+\varphi}^2$ log. 1,3497296.

II. $m^2 = \overline{5g-\varphi}^2$ log. 1,7900934 $= \log \frac{25}{9} - 33333$, Suono che cala dalla Quarta ~~maggiore~~ superflua sopra l'Ottava $\frac{25}{9}$, per qualche cosa di più di mezzo Comma, il cui logaritmo 53950.

III. $m^2 = \overline{7g+\varphi}^2$ log. 2,0824344 $= \log \frac{49}{9} - 32448$. Questo intervallo supera la Quarta sopra la doppia Ottava per 57100 grandezza poco più grande del Comma.

IV. $m^2 = \overline{9g-\varphi}^2$ log. 2,3007246 $= \log \frac{81}{9} = 9 - 32475$, Seconda maggiore sopra l'Ottava triplicata.

V. $m^2 = \overline{11g+\varphi}^2$ log. 2,4750250 $= \log \frac{121}{9} - 32475$, Sesta maggiore presso che giusta sopra la tripla Ottava, crescendo solamente per 3566 parti 15.ma del Comma

VI. $m^2 = \overline{13g-\varphi}^2$ log. 2,6201264 $= \log \frac{169}{9} - 32475$, Seconda superflua sopra la quadrupla Ottava calante per 6700 ottava parte del Comma dalla ragione $\frac{7}{6} \cdot 16 = \frac{56}{3}$, propria di cuo intervallo.

XXVI. In grazia dell'esperimento, che a suo luogo riporrò, metto sotto gli occhj di chi legge la seguente Tavola, in cui, posto che il suono più grave di un cilindro sia unisono d'una corda la cui lunghezza è 60, dispongo ordinatamente le lunghezze delle porzioni della corda stessa unisone agli altri suoni di esso cilindro.

Porzioni della corda 60 unisone ai suoni acuti d'un cilindro nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda 60.

	Lunghezze delle corde
I.	60
II.	21, 75 +
III.	11, 10 +
IV.	6, 717 −
V.	4, 496 +
VI	3, 219 +

&c.

Scolio

XXVII. Stabilisce rettamente il celebratissimo Sig.r Leonardo Eulero, che rispetto alle lamine elastiche sia $S = m^2\sqrt{\frac{hl}{M\ell^3}}$.

Ma attesto quello che dissi alla pag. 269, che la forza elastica E sta in ragione composta della rigidità r della materia componente le lamine, della loro larghezza D, e del quadrato G^2 della loro grossezza, venivo ad abbreviar la proporzione come $\frac{m^2}{L^2}\sqrt{\frac{Gr}{S\delta}}$; la quale non si accorda colla verità, ~~anzi~~ ed è riprovata

riprovata dalla esperienza. Le lamine della stessa materia, simili, e similmente vibranti, non si uniformerebbero alla legge comune a tutti i corpi simili, ~~lamine vibranti~~, i cui moti serbano la ragione reciproca dei loro omologhi lati. Oltre a ciò i moti delle lamine, che differiscono solo nella grossezza, dovrebbero seguire la proporzione diretta delle grossezze, e gli esperimenti ci insegnano, che i loro moti corrispondono nella ragione delle grossezze. Col metodo da me praticato in riguardo ai cilindri si dimostra, che nelle lamine è la forza elastica è come $r\,D\,G^3$. Fatto uso di ciò nel canone troveremo S come $\frac{n^2 G}{L^2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, rapporto, che ha il fondamento di una rigorosa dimostrazione, e colla esperienza si accorda mirabilmente.

~~[illegible]~~ Aggiungo la importante avvertenza, che nella determinazione dei moti delle lamine elastiche non ha ~~punto~~ veruna parte la loro larghezza, dimodochè due lamine, la cui differenza consiste solo nella larghezza, rendono lo stesso moto.

Problema VIII.

<u>Determinare ~~analiticamente~~ rispet. a ciascun modo in cui può oscillare un cilindro, i nodi, o punti stabili, intorno ai quali si vibra.</u>

XXVIII. Dalle cose superiormente spiegate raccogliesi, che se il numero dei punti immobili si uguaglia a 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c, conforme che un cilindro si vibra o giusta la prima, o giusta la seconda, o giusta la terza &c. spezie delle oscillazioni, che il cilindro stesso può concepire. Se il numero dei nodi è impari, un nodo cade alla metà

del

del cilindro; e la sua posizione è determinata. Resterebbe adunque da stabilire il sito di due nodi nelle ~~generi~~ spazie di vibrazioni prima, e seconda; di quattro nodi nelle ~~generi~~ spazie terza, e quarta; di sei nodi nelle ~~generi~~ spazie quinta, e sesta &c.; se non che essendo collocati essi nodi a coppia a coppia a pari distanze dalla metà del cilindro, l'uno a destra, e l'altro a sinistra, basta il determinare un nodo nella prima, e nella seconda ~~genere~~ spazie, due nodi nella terza, e nella quarta ~~genere~~ spazie, tre nodi nella quinta, e nella sesta ~~genere~~ spazie di oscillazioni, e così di seguito.

Nel sito del punto immobile è l'ordinata $y = 0$, ed in tale ipotesi abbiamo in Corollarj terzo, del numero XVI. e secondo del numero XVIII. ~~nell'ultimo [illegible] problema~~ le due equazioni $e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = \frac{\pm 2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}$, $e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}} = \frac{\pm 2\,\mathrm{sen}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{L}{c}}}$. Il segno $\sqrt{\cos\frac{L}{c}}$ „ „ „ „ negativo negli omogenei di comparazione è adattato a quei casi, nei quali sono negative le quantità $\cos\frac{z}{c}$, $\mathrm{sen}\frac{z}{c}$. Se i predetti coseni, e seni si considerassero sempre come positivi, qualunque sia la loro direzione, valerà il segno positivo, del quale farò uso costantemente. Servono le due equazioni, la prima per il genere di vibrazioni indicato coi numeri impari, la seconda per il genere di vibrazioni dei numeri pari contrassegnato.

Si stabilisce la posizione d'un nodo assegnando all'angolo $\frac{z}{c}$ quella precisa misura, onde secondo i varj generi di vibrazioni si verifichi

si verifichi o l'una, o l'altra delle premesse equazioni. Troveremo poi la grandezza prossimamente esatta dell'angolo mentovato ponendo in opera il metodo dei limiti usato al numero XXII. per iscoprire il valore dell'angolo φ. Osserverà il Lettore nei seguenti computi, che io ristringo la misura dell'angolo $\frac{z}{c}$ fra due confini, che differiscono per un solo minuto secondo, e che dagli errori, nei quali si incorre abbracciando o l'uno, o l'altro limite, ne deduco il valore adequatamente giusto dell'angolo $\frac{z}{c}$.

XXIX. 5. espressa in minuti secondi l'angolo $\frac{z}{c}$, e col metodo insegnato al numero XXI, e praticato al numero XII. in riguardo all'angolo φ si trovi il logaritmo dell'angolo $\frac{z}{c}$ espresso in parti del raggio = 1. Il logaritmo del numero $e = 2,7182818$ si eguaglia a $0,4342945$, ed il logaritmo di questo ultimo numero pareggia $-0,3622157$, e quindi il logaritmo del logaritmo del numero e, o sia $lle = -0,3622157$. Sottraendo adunque dal logaritmo dell'angolo $\frac{z}{c}$ espresso in parti del raggio il numero $0,3622157$ ne risulterà una quantità $= l\frac{z}{c} + lle$. Si faccia ritorno coll'ajuto delle tavole dai logaritmi ai numeri, e ci si presenterà il valore della grandezza $\frac{z}{c}le$, e nuovamente passando dai logaritmi ai numeri scopriremo il valore di $e^{\frac{z}{c}}$. Dato questo riesce facile il ritrovare il valore di $e^{-\frac{z}{c}} = \frac{1}{e^{\frac{z}{c}}}$ e conseguentemente quello di $e^{\frac{z}{c}} \pm e^{-\frac{z}{c}}$.

I valori dell'uno, e dell'altro omogeneo di comparazione $\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{z}{c}}}$, $\frac{2\operatorname{sen}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{z}{c}}}$ si determineranno col mezzo

Del

dal seguente artifizio. Prendasi dalle tavole il logaritmo del $\cos\frac{z}{c}$, o del $\operatorname{sen}\frac{z}{c}$, ed indi sottratto $\frac{1}{2}\,l\cos\frac{\alpha}{c}$, dal residuo nuovamente si levi il numero $4,6989700$, e quello che resta si eguaglierà a $l\frac{a\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$, o pure a $l\frac{a\operatorname{sen}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$ (h). I predetti coseni, e seni saranno valutati al raggio $=1$, siccome al principio del numero XIII. è stato da me prescritto. Fatto poscia il passaggio dai logaritmi ai numeri, si ritroveranno i valori dei due omogenei di comparazione $\frac{a\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$, $\frac{a\operatorname{sen}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$.

Determinato poi via del metodo dei limiti il valore prossimamente esatto dell'angolo $\frac{z}{c}$ espresso in minuti secondi, e trovato poi il logaritmo del medesimo angolo espresso in parti del raggio $=1$, si sottragga $l\frac{\alpha}{c}$, ed il residuo si eguaglierà a $l\frac{z}{\alpha}$. I diversi valori, che può avere $l\frac{\alpha}{c}$

(h) Chiamo U, V i logaritmi presi dalle Tavole dei seni delle quantità $\cos\frac{z}{c}$, $\cos\frac{\alpha}{c}$, e per le cose dimostrate nella annotazione seguente f ed inserita nel numero XXI., saranno $U-10,0000000$, $V-10,0000000$ i logaritmi tolti dalle Tavole dei numeri, proprj dei seni relativi al raggio $=1$ degli stessi angoli $\frac{z}{c}$, $\frac{\alpha}{c}$; dimodochè si avrà $l\cos\frac{z}{c} = U-10,0000000$, $l\cos\frac{\alpha}{c} = V-10,0000000$. Ma in riguardo ai logaritmi comuni, il cui parametro $=1$, $l\frac{a\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = l\cos\frac{z}{c} + la - \frac{1}{2}l\cos\frac{\alpha}{c}$. Dunque surrogati nell'omogeneo di comparazione in cambio di $l\cos\frac{z}{c}$, $l\cos\frac{\alpha}{c}$, la i loro valori $U-10,0000000$, $V-10,0000000$, $0,3010300$, e ridotti i computi, troveremo $l\frac{a\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = U-\frac{1}{2}V-4,6989700$; il che ec. La stessa dimostrazione vale per comprovare il valore accennato a $l\frac{a\operatorname{sen}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$.

$\int \frac{L}{z}$ rispettivamente alla varia specie di oscillazioni gli ho registrati al fine del numero XXV. Aggiungendo [illegible] = 0,30 [illegible] 300 [illegible] ne risulterà il valore di $\int \frac{z}{\frac{1}{2}L}$, col mezzo della quale le Tavole ci suggeriranno quello di $\frac{z}{\frac{1}{2}L}$, quantità, che determina la ricercata proporzione fra la linea nota $\frac{1}{2}L$ - CA Fig. 19ª, 20ª, 21ª, 22ª, 23ª, 24ª &c.) e la lunghezza di z ognuna per esempio a CC, al punto estremo e della quale il punto immobile C corrisponde.

XXX. Dopo che ho spiegata la maniera di istruire i computi, passo ad effettuare i calcoli stessi, che mi hanno costata una lunga fatica, e che io continuo sino alla specie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

Schediasma XI.

Computo per la ~~genere~~ specie I. delle vibrazioni dei cilindri.

$\frac{z}{c}$ = 74°, 45', 23''
in min. sec. 269123''
log. = 5,4299506
sottra 5,3144251
$l\frac{z}{c}$ = 0,1155257
sottra 0,3622157
$l\frac{z}{c} + lle$ = 9,7533100
$\frac{z}{c}le$ = 0,5666436
$e^{\frac{z}{c}}$ = 3,6867496
$e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,2712417
$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}$ = 3,9579913

$\frac{z}{c}$ = 74°, 45', 24''
in min. sec. 269124''
log = 5,4299524
sottra 5,3144251
$l\frac{z}{c}$ = 0,1155273
sottra 0,3622157
$l\frac{z}{c} + lle$ = 9,7533116
$\frac{z}{c}le$ = 0,5666457
$e^{\frac{z}{c}}$ = 3,6867674
$e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,2712403
$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}$ = 3,9580077

$l\cos\frac{z}{c}$ = 9,4198295
sottra $\frac{1}{2}l\cos\frac{\alpha}{c}$ = 4,1233764
5,2964531
sottra 4,6989700
$l\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$ = 0,5974831
$\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$ = 3,9579665
errore = + 00252
altro errore = − 0113
differenza = 465

$l\cos\frac{z}{c}$ = 9,4198216
sottra $\frac{1}{2}l\cos\frac{\alpha}{c}$ = 4,1233764
5,2964454
sottra 4,6989700
$l\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$ = 0,5974754
$\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$ = 3,9579964
errore = − 113

Facciasi come 465 : 752 :: 1'' : $\frac{752''}{465}$ = 0,4694'' porzione di secondo, per cui va accresciuto il minor valore dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde sia

$\frac{z}{c}$ = 269123,4694''
log = 5,4299522
5,3144251
$l\frac{z}{c}$ = 0,1155271
sottra $l\frac{\alpha}{c}$ = 0,6748646
$l\frac{z}{\alpha}$ = 9,4406623
aggiungi $l2$ = 0,3010300
$l\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha}$ = 9,7416923
$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{CQ}{CA}$ = 0,5516864 (Fig. 19.)

 Computo per la ~~genere~~ specie II (Sefradiusma XI.) delle vibrazioni dei cilindri.

$\frac{z}{c} = 165°, 32', 5''$	$\frac{z}{c} = 165°, 32', 6''$
in min. sec. $= 595925$	in min. sec $= 595926$
$\log = 5,7751916$	$\log = 5,7751924$
sottra $5,3144251$	sottra $5,3144251$
$l\frac{z}{c} = 0,4607665$	$l\frac{z}{c} = 0,4607673$
sottra $0,3622157$	sottra $0,3622157$
$l\frac{z}{c} + lle = 0,0985508$	$l\frac{z}{c} + lle = 0,0985516$
$\frac{z}{c} le = 1,2547317$	$\frac{z}{c} le = 1,2547340$
$e^{\frac{z}{c}} = 17,9775993$	$e^{\frac{z}{c}} = 17,9776945$
sottra $e^{-\frac{z}{c}} = 0,0556248$	sottra $e^{-\frac{z}{c}} = 0,0556245$
$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}} = 17,9219745$	$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}} = 17,9220700$
$l \operatorname{sen} \frac{z}{c} = 9,3975407$	$l \operatorname{sen} \frac{z}{c} = 9,3975725$
sottra $\frac{1}{2} l \cos. \frac{\alpha}{c} = 3,4452230$	sottra $\frac{1}{2} l \cos. \frac{\alpha}{c} = 3,4452239$
$5,9523577$	$5,9523495$
sottra $4,6989700$	sottra $4,6989700$
$l \frac{2 \operatorname{sen} \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos. \frac{\alpha}{c}}} = 1,2533477$	$l \frac{2 \operatorname{sen} \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos. \frac{\alpha}{c}}} = 1,2533795$
$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos \frac{\alpha}{c}}} = 17,9220512$	$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos. \frac{\alpha}{c}}} = 17,9217126$
errore $= +$ 0767	errore $= -$ 03572

altro errore $= -$ 3572

differenza $=$ 4339

Facciasi come $4339 : 767 :: 1'' : \frac{767''}{4339} = 0,1768''$ parte di secondo che deve aggiungersi al più piccolo valore dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde s'abbia

$\frac{z}{c} = 595925,1768''$

$\log = 5,7751918$

sottra $= 5,3144251$

$l\frac{z}{c} = 0,4607667$

sottra $l\frac{\alpha}{c} = 0,8950469$

$l\frac{z}{\alpha} = 9,5657198$

aggiungi $l2 = 0,3010300$

$l\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = 9,8667498$.

$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{Ce}{CA} = 0,7357483$[illegible] (Fig. [illegible])

Schediasma XI.

Computo per lo spazio III. delle vibrazioni dei cilindri. 141.

$\frac{z}{c} = 49°, 10', 41''$

in min. sec. = 321041''

log = 5,5065605

sottra 5,3144251

$l\frac{z}{c}$ = 0,1921354

sottra 0,3622157

$l\frac{z}{c} + lle$ = 9,8299197

$\frac{z}{c} le$ = 0,6759560

$e^{\frac{z}{c}}$ = 4,7419617

$e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,2104832

$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}$ = 4,9524449

$\frac{z}{c} = 49°, 10', 42''$

in min. sec. = 321042''

log = 5,5065618

sottra 5,3144251

$l\frac{z}{c}$ = 0,1921367

sottra 0,3622157

$l\frac{z}{c} + lle$ = 9,8299210

$\frac{z}{c} le$ = 0,6759600

$e^{\frac{z}{c}}$ = 4,7419836

$e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,2104822

$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}}$ = 4,9524658

$l\cos\frac{z}{c}$ = 8,1568857

sottra $\frac{1}{2} l\cos\frac{\alpha}{c}$ = 2,7628494

5,3938363

sottra 4,6949700

$l\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$ = 0,6948663

$\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$ = 4,9529772

errore = + 1323

altro errore = − 15568

$l\cos\frac{z}{c}$ = 8,1565394

sottra $\frac{1}{2} l\cos\frac{\alpha}{c}$ = 2,7628494

5,3936900

sottra 4,6949700

$\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$. 0,6947200

$\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$ = 4,9513090

errore − 15568

differenza = 16891

Facciasi come 16891 : 1323 :: 1'' : $\frac{1323''}{16891}$ = 0,0783'' porzione di secondo da aggiungersi al minor valore dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde si abbia

$\frac{z}{c}$ = 321041,0783''

log. 5,5065606

sottra 5,3144251

$l\frac{z}{c}$ = 0,1921355

sottra $l\frac{\alpha}{c}$ = 1,0412192

$l\frac{z}{\alpha}$ = 9,1509163

aggiungi $l2$ = 0,3010300

$l\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha}$ = 9,4519463

$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{Ce}{CA}$ = 0,2831042 (Fig. 28.)

142 Segue il computo per la specie III. Delle vibrazioni dei cilind[ri] *(interlinear: Schediasma XI.)*

$\frac{z}{c} = 255°, 30', 6''$	$\frac{z}{c} = 255°, 30', 7''$
in min. sec. $= 919806''$	in min. sec. $= 919807''$
log $= 5{,}9636963$	log $= 5{,}9636967$
sottra $5{,}3144251$	sottra $5{,}3144251$
$l\frac{z}{c} = 0{,}6492712$	$l\frac{z}{c} = 0{,}6492716$
sottra $0{,}3622157$	sottra $0{,}3622157$
$l\frac{z}{c} + lle = 0{,}2870555$	$l\frac{z}{c} + lle = 0{,}2870559$
$\frac{z}{c}le = 1{,}9366695$	$\frac{z}{c}le = 1{,}9366713$
$e^{\frac{z}{c}} = 86{,}4309940$	$e^{\frac{z}{c}} = 86{,}4313519$
$e^{-\frac{z}{c}} = 0{,}0115700$	$e^{-\frac{z}{c}} = 0{,}0115699$
$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = 86{,}4425640$	$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = 86{,}4429218$

$l\cos\frac{z}{c} = 9{,}3985507$	$l\cos\frac{z}{c} = 9{,}3985426$
sottra $\frac{1}{2}l\cos\frac{\alpha}{c} = 2{,}7628444$	sottra $\frac{1}{2}l\cos\frac{\alpha}{c} = 2{,}7628494$
$6{,}6357013$	$6{,}6356932$
sottra $4{,}6989700$	sottra $4{,}6989700$
$l\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 1{,}9367313$	$l\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 1{,}9367232$
$\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 86{,}4432469$	$\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 86{,}4416733$
errore $= +\ 7229$	errore $= -\ 12485$

altro errore $= -\ 12485$

differenza $= 19714$

Facciasi come $19714 : 7229 :: 1'' : \frac{7229''}{19714} = 0{,}3667''$, parte di secondo, che deve aggiungersi al valore più piccolo dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde un

$\frac{z}{c} = 919806{,}3667''$

log $= 5{,}9636964$

sottra $5{,}3144251$

$l\frac{z}{c} \quad 0{,}6492713$

sottra $l\frac{\alpha}{c} = 1{,}0412192$

$l\frac{z}{\alpha} = 9{,}6080521$

aggiungi $l2 = 0{,}3010300$

$l\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = 9{,}9090821$

$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{CnQ}{CA} = 0{,}8111147$ (Fig. 22.)

Scheda stampata XI.
Computo per l'esperienza IV. delle vibrazioni dei cilindri

$\frac{z}{c} = 179^\circ, 12', 50''$
in min. sec. = 645170''
log = 5,8096742
sottra 5,3144251
$l\frac{z}{c}$ = 0,4952491
sottra 0,3622157
$l\frac{z}{c} + lle$ = 0,1330334
$\frac{z}{c} le$ = 1,3584179
$e^{\frac{z}{c}}$ = 22,8253757
sottra $e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,0438107
$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}}$ = 22,7815650

$\frac{z}{c} = 179^\circ, 12', 51''$
in min. sec. = 645171''
log = 5,8096749
sottra 5,3144251
$l\frac{z}{c}$ = 0,4952498
sottra 0,3622157
$l\frac{z}{c} + lle$ = 0,1330341
$\frac{z}{c} le$ = 1,3584201
$e^{\frac{z}{c}}$ = 22,8254913
sott. $e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,0438107
$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}}$ = 22,7816806

$l\,sen.\frac{z}{c}$ = 8,1373342
sottra $\frac{1}{2} l\cos\frac{\alpha}{c}$ = 2,0806276
6,0567066
sottra 4,6989700
$l\frac{2\,sen\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$ = 1,3577366
$\frac{2\,sen\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$ = 22,7890844
errore = + 75064
altro errore = − 804
differenza = 75868

$l\,sen.\frac{z}{c}$ = 8,1371818
sottra $\frac{1}{2} l\cos\frac{\alpha}{c}$ = 2,0806276
6,0565542
sottra 4,6989700
$l\frac{2\,sen\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$ = 1,3575842
$\frac{2\,sen\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}}$ = 22,7816002
errore = − 804

Facciasi come 75868 : 75064 :: 1'' : $\frac{75064}{75868}$ = 0,9894'' porzione di secondo, che va aggiunta al minor valore dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde si ha precisamente

$\frac{z}{c}$ = 645170,9894''
log = 5,8096746
sottra 5,3144251
$l\frac{z}{c}$ = 0,4952497
sottra $l\frac{\alpha}{c}$ = 1,1503623
$l\frac{z}{\alpha}$ = 9,3448874
aggiungi $l2$ = 0,3010300
$l\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha}$ = 9,6459174
$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{CE}{CA}$ = 0,4425... (Zigzag)

 Segue il computo per la specie IV. delle vibrazioni (Schediasma XJ.) dei cilindri.

$\frac{z}{c} = 345^\circ, 30', 15''$

in min. sec. = 1243815''

$\log = 6,0947558$

sottra $5,3144251$

$l\frac{z}{c} = 0,7803307$

sottra $0,3622157$

$l\frac{z}{c} + lle = 0,4181150$

$\frac{z}{c} le = 2,6186764$

$e^{\frac{z}{c}} = 415,7922488$

sottra $e^{-\frac{z}{c}} = 0,0024050$

$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}} = 415,7898438$

$\frac{z}{c} = 345^\circ, 30', 16''$

in min. sec. = 1243816

$\log = 6,0947561$

sottra $5,3144251$

$l\frac{z}{c} = 0,7803310$

sottra $0,3622157$

$l\frac{z}{c} + lle = 0,4181153$

$\frac{z}{c} le = 2,6186782$

$e^{\frac{z}{c}} = 415,7939713$

sottra $e^{-\frac{z}{c}} = 0,0024050$

$e^{\frac{z}{c}} \cdot e^{-\frac{z}{c}} = 415,7915663$

$l \operatorname{sen} \frac{z}{c} = 9,3984774$

sottra $\frac{1}{2} l \cos \frac{\alpha}{c} = 2,0406276$

$7,3178498$

sottra $4,6989700$

$l \frac{2 \operatorname{sen} \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos \frac{\alpha}{c}}} = 2,6188798$

$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos \frac{\alpha}{c}}} = 415,7955024$

errore = + 56586

altro errore = − 38151

differenza = 94737

$l \operatorname{sen} \frac{z}{c} = 9,3984693$

sottra $\frac{1}{2} l \cos \frac{\alpha}{c} = 2,0406276$

$7,3178417$

$4,6989700$

$l \frac{2 \operatorname{sen} \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos \frac{\alpha}{c}}} = 2,6188717$

$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos \frac{\alpha}{z}}} = 415,7877312$

errore = − 38151

Facciasi come 94737 : 56586 :: 1'' : $\frac{56586''}{94737}$ = 0,5973'' parte di secondo, che aggiunta al minor valore dell'angolo $\frac{z}{c}$ ci dà

$\frac{z}{c} = 1243815,5973''$

$\log = 6,0947560$

sottra $5,3144251$

$l\frac{z}{c} = 0,7803309$

sottra $l\frac{\alpha}{c} = 1,1503623$

$l\frac{z}{\alpha} = 9,6299686$

aggiungi $l2 = 0,3010300$

$l\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = 9,9309986$

$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{Cne}{CA} = 0,8530974$ (Figura)

Computo per la V. specie delle vibrazioni dei cilindri (Schedinsma XI.)

$\frac{z}{c} = 49^\circ, 57', 50''$

in min. sec. = $323470''$

$l\,z = 5{,}5103707$

sottra $5{,}3144251$

$l\frac{z}{c} = 0{,}1959456$

sottra $0{,}3622157$

$l\frac{z}{c} + lle = 9{,}8337299$

$\frac{z}{c}\,le = 0{,}6819144$

$e^{\frac{z}{c}} = 4{,}8074458$

$e^{-\frac{z}{c}} = 0{,}2080107$

$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = 5{,}0154565$

$\frac{z}{c} = 49^\circ, 57', 51''$

in min. sec = $323471''$

$\log = 5{,}5103720$

sottra $5{,}3144251$

$l\frac{z}{c} = 0{,}1959469$

sottra $0{,}3622157$

$l\frac{z}{c} + lle = 9{,}8337312$

$\frac{z}{c}\,le = 0{,}681916$

$e^{\frac{z}{c}} = 4{,}8074690$

$e^{-\frac{z}{c}} = 0{,}2080097$

$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = 5{,}0154787$

$l\cos\frac{z}{c} = 6{,}7995141$

sottra $\frac{1}{2}\,l\cos\frac{\alpha}{c} = 1{,}3944404$

$5{,}4010377$

sottra $4{,}6949700$

$l\,\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 0{,}7020677$

$\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 5{,}0357912$

errore = + 203347

altro errore = − 164235

differenza = 367582

$l\cos\frac{z}{c} = 6{,}7961645$

sottra $\frac{1}{2}\,l\cos\frac{\alpha}{c} = 1{,}3944404$

$5{,}3976841$

sottra $4{,}6949700$

$l\,\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 0{,}6947141$

$\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 4{,}9970552$

errore = − 164235

Facciasi come $367582 : 203347 :: 1'' : \frac{203347}{367582} = 0{,}5247''$, parte di secondo da aggiungersi al valore più piccolo dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde sia

$z = 323470{,}5247''$

$l\,z = 5{,}5103714$

sottra $5{,}3144251$

$l\frac{z}{c} = 0{,}1959463$

sottra $l\frac{\alpha}{c} = 1{,}2375125$

$l\frac{z}{\alpha} = 8{,}9584338$

aggiungi $l\,2 = 0{,}3010300$

$l\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = 9{,}2594638$

$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{CE}{CA} = 0{,}1817456$ (fig. 28)

 Segue il computo per la V. specie delle vibrazioni dei cilindri. Schediasma XL.

$\frac{z}{c} = 269°, 12', 45''$
in min. sec. $= 969165''$
$\log = 5,9863977$
sottra $5,3144251$

$l\frac{z}{c} = 0,6719726$
sottra $0,3622157$

$l\frac{z}{c} + lle = 0,3097569$
$\frac{z}{c}le = 2,0405954$
$e^{\frac{z}{c}} = 109,7982563$
$e^{-\frac{z}{c}} = 0,0091076$

$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = 109,8073639$

$\frac{z}{c} = 269°, 12', 46''$
in min. sec. $= 969166''$
$\log = 5,9863982$
sottra $5,3144251$

$l\frac{z}{c} = 0,6719731$
sottra $0,3622157$

$l\frac{z}{c} + lle = 0,3097574$
$\frac{z}{c}le = 2,0405977$
$e^{\frac{z}{c}} = 109,7988375$
$e^{-\frac{z}{c}} = 0,0091076$

$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = 109,8079451$

$l\cos\frac{z}{c} = 8,1380961$
sottra $\frac{1}{2}l\cos\frac{\alpha}{c} = 1,3984804$

$6,7396157$
sottra $4,6989700$

$l\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 2,0406457$
$\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 109,8109762$

errore $= +\ 36123$
altro errore $= -\ 354912$

differenza $= 391035$

$l\cos\frac{z}{c} = 8,1379437$
sottra $\frac{1}{2}l\cos\frac{\alpha}{c} = 1,3984804$

$6,7394633$
sottra $4,6989700$

$l\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 2,0404933$
$\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 109,7724539$

errore $= -\ 354912$

Facciasi come $391035 : 36123 :: 1'' : \frac{36123''}{391035} = 0,0924''$ parte di secondo, per cui deve accrescersi il valore dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde si abbia

$\frac{z}{c} = 969165,0924''$
$\log = 5,9863978$
sottra $5,3144251$

$l\frac{z}{c} = 0,6719727$
sottra $l\frac{\alpha}{c} = 1,2375125$

$l\frac{z}{\alpha} = 9,4344602$
aggiungi $l2 = 0,3010300$
$l\frac{2z}{\alpha} = 9,7354902$
$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{Cnc}{CA} = 0,5438638$ (Fig. 28)

Schediasma XI.

Segue il computo per la V. specie delle vibrazioni dei cilindri. 147.

$\frac{z}{c} = 435°, 30', 11''$

in min. sec. $= 1567811''$

log $= 6,1952936$

sottra $5,3144251$

$l\frac{z}{c} = 0,8808685$

sottra $0,3622157$

$l\frac{z}{c} + ll e = 0,5186528$

$\frac{z}{c}\, le = 3,3010555$

$e^{\frac{z}{c}} = 2000,1174574$

$e^{-\frac{z}{c}} = 0,0005000$

$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = 2000,1179574$

$\frac{z}{c} = 435°, 30', 12''$

in min. sec. $= 1567812''$

log $= 6,1952939$

sottra $5,314425$

$l\frac{z}{c} = 0,8808644$

sottra $0,3622157$

$l\frac{z}{c} + ll e = 0,5186531$

$\frac{z}{c}\, le = 3,301057$

$e^{\frac{z}{c}} = 000,1280516$

$e^{-\frac{z}{c}} = 0,0005000$

$e^{\frac{z}{c}} + e^{-\frac{z}{c}} = 2000,1285516$

$l\cos\frac{z}{c} = 9,3985100$

sottra $\frac{1}{2}\, l\cos\frac{\alpha}{c} = 1,3984404$

$8,0000296$

sottra $4,6989700$

$l\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 3,3010596$

$\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 2000,1363427$

errore $= +\ 183853$

altro errore $= -\ 295189$

differenza $= 479042$

$l\cos\frac{z}{c} = 9,3985019$

sottra $\frac{1}{2}\, l\cos\frac{\alpha}{c} = 1,3984404$

$8,0000215$

sottra $4,6989700$

$\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 3,3010515$

$\frac{2\cos\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 2000,0990327$

errore $= -\ 295189$

Facciasi come $479042 : 183853 :: 1'' : \frac{183853''}{479042} = 0,3838'$ porzione di secondo, che ~~unita al minore valore~~ dell'angolo $\frac{z}{c}$ ci da'

$\frac{z}{c} = 1567811,3838''$

log $= 6,1952938$

sottra $5,3144251$

$l\frac{z}{c} = 0,8808687$

sottra $l\,\alpha = 1,2375125$

$l\frac{z}{\alpha} = 9,6433562$

aggiungi $l\,2 = 0,3010300$

$l\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = 9,9443862$

$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{C3e}{CA} = 0,8794045$ (Fig. 20.)

Schediasma XI.

Computo per la VI. specie della vibrazione dei cilindri.

$\frac{z}{c} = 179^\circ, 57', 50''$	$\frac{z}{c} = 179^\circ, 57', 57''$
in min. sec. = 647870''	in min. sec. = 647877''
log = 5,8114919	log = 5,8114926
sottra 5,3144251	sottra 5,3144251
$l\frac{z}{c}$ = 0,4970668	$l\frac{z}{c}$ = 0,4970675
sottra 0,3622157	sottra 0,3622157
$l\frac{z}{c} + llc$ = 0,1348511	$l\frac{z}{c} + llc$ = 0,1348518
$\frac{z}{c}lc$ = 1,3641153	$\frac{z}{c}lc$ = 1,3641175
$e^{\frac{z}{c}}$ = 23,1267891	$e^{\frac{z}{c}}$ = 23,1269063
sottra $e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,0432399	sottra $e^{-\frac{z}{c}}$ = 0,0432397
$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}}$ = 23,0835492	$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}}$ = 23,0836666

$l \operatorname{sen} \frac{z}{c}$ = 6,7789985	$l \operatorname{sen} \frac{z}{c}$ = 6,7706810
sottra $\frac{1}{2} l \cos \frac{\alpha}{c}$ = 0,7162944	sottra $\frac{1}{2} l \cos \frac{\alpha}{c}$ = 0,7162924
6,0627041	6,0543886
sottra 4,6989700	sottra 4,6989700
$l \frac{2 \operatorname{sen} \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos \frac{\alpha}{c}}}$ = 1,3637341	$l \frac{2 \operatorname{sen} \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos \frac{\alpha}{c}}}$ = 1,3554186
$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos \frac{\alpha}{c}}}$ = 23,1064981	$\frac{2 \operatorname{sen} \frac{z}{c}}{\sqrt{\cos \frac{\alpha}{c}}}$ = 22,6682829
errore = + 22949	errore = − 4153837
altro errore = − 4153837	
Differenza − 4383326	

Facciasi come 4383326 : 22949 :: 1'' : $\frac{22949''}{4383326}$ = 0,0524'' parte di secondo da aggiungersi al minor valore di $\frac{z}{c}$, onde ne risulti

$\frac{z}{c}$ = 647870,0524''

log = 5,8114919

sottra 5,3144251

$l\frac{z}{c}$ = 0,4970668

sottra $l\frac{\alpha}{c}$ = 1,3100632

$l\frac{z}{\alpha}$ = 9,1870036

aggiungi $l\,2$ = 0,3010300

$l\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha}$ = 9,4880336

$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{CE}{CA}$ = 0,3076335 (Fig. 44)

Schediasma XI.

Segue il computo per la VI sgettata della vibrazioni dei cilindri

$\frac{z}{c} = 359^\circ, 12', 45''$	$\frac{z}{c} = 359^\circ, 12', 46''$
in min. sec. $= 1293165''$	in min. sec. $= 1293166''$
$\log = 6,1116539$	$\log = 6,1116542$
sottra $5,3144251$	sottra $5,3144251$
$l\frac{z}{c} = 0,7972288$	$l\frac{z}{c} = 0,7972291$
sottra $0,3622157$	sottra $0,3622157$
$l\frac{z}{c} + ll e = 0,4350131$	$l\frac{z}{c} + ll e = 0,4350134$
$\frac{z}{c} l a = 2,7227837$	$\frac{z}{c} l a = 2,7227856$
$a^{\frac{z}{c}} = 528,1821168$	$a^{\frac{z}{c}} = 528,1823349$
sottra $a^{-\frac{z}{c}} = 0,0018933$	sottra $a^{-\frac{z}{c}} = 0,0018933$
$a^{\frac{z}{c}} - a^{-\frac{z}{c}} = 528,1802235$	$a^{\frac{z}{c}} - a^{-\frac{z}{c}} = 528,1825349$
$l\,\mathrm{sen}\frac{z}{c} = 8,1380951$	$l\,\mathrm{sen}\frac{z}{c} = 8,1379437$
sottra $\frac{1}{2} l\cos\frac{\alpha}{c} = 0,7162924$	sottra $\frac{1}{2} l\cos\frac{\alpha}{c} = 0,7162924$
$7,4218037$	$7,4216513$
sottra $4,6989700$	sottra $4,6989700$
$l\frac{2\,\mathrm{sen}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 2,7228337$	$l\frac{2\,\mathrm{sen}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 2,7226813$
$\frac{2\,\mathrm{sen}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 528,2429940$	$\frac{2\,\mathrm{sen}\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 528,0573942$
errore $= + 627705$	errore $= - 1249407$

altro errore $= - 1249407$

differenza $= 1877112$

Facciasi come $1877112 : 627705 :: 1'' : \frac{627705}{1877112} = 0,3342''$

porzione di secondo per cui deve aumentarsi il menor valore di $\frac{z}{c}$, onde sia

$\frac{z}{c} = 1293165,3342''$

$\log = 6,1116540$

sottra $5,3144251$

$l\frac{z}{c} = 0,7972289$

sottra $l\frac{\alpha}{c} = 1,3100632$

$l\frac{z}{\alpha} = 9,4871657$

aggiungi $l\,2 = 0,3010300$

$l\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = 9,7881957$

$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{CAE}{CA} = 0,6140360$ (Fig. 24)

Schediasma XI.

148. Segue il computo per la VI. spezie delle vibrazioni dei cilindri.

$\frac{z}{c} = 525^\circ, 30', 11''$	$\frac{z}{c} = 525^\circ, 30', 12''$
in min. sec $= 1891811''$	in min. sec $= 1891812''$
$\log = 6,2768777$	$\log = 6,2768779$
sottra $5,3144251$	sottra $5,3144251$
$l\frac{z}{c} = 0,9624526$	$l\frac{z}{c} = 0,9624528$
sottra $0,3622157$	sottra $0,3622157$
$l\frac{z}{c} + lle = 0,6002369$	$l\frac{z}{c} + lle = 0,6002371$
$\frac{z}{c} le = 3,9832440$	$\frac{z}{c} le = 3,9832459$
$e^{\frac{z}{c}} = 9621,5265487$	$e^{\frac{z}{c}} = 9621,5685841$
sottra $e^{-\frac{z}{c}} = 0,0001039$	sottra $e^{-\frac{z}{c}} = 0,0001039$
$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}} = 9621,5264448$	$e^{\frac{z}{c}} - e^{-\frac{z}{c}} = 9621,5684802$
$l\,\mathrm{sen}\,\frac{z}{c} = 9,3985100$	$l\,\mathrm{sen}\,\frac{z}{c} = 9,3985029$
sottra $\frac{1}{2} l \cos\frac{\alpha}{c} = 0,7162924$	sottra $\frac{1}{2} l \cos\frac{\alpha}{c} = 0,7162924$
$8,6822176$	$8,6822095$
sottra $4,6989700$	sottra $4,6989700$
$l\frac{n\,\mathrm{sen}\,\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 3,9832476$	$l\frac{n\,\mathrm{sen}\,\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 3,9832395$
$\frac{n\,\mathrm{sen}\,\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 9621,6061947$	$\frac{n\,\mathrm{sen}\,\frac{z}{c}}{\sqrt{\cos\frac{\alpha}{c}}} = 9621,4269912$
errore $= +\ 797499$	errore $= -\ 1414890$

altro errore $= -\ 1414890$

differenza $= 2212389$

Facciasi come $2212389 : 797499 :: 1'' : \frac{797499''}{2212389} = 0,3605''$ quantità da aggiungersi al più piccolo valore dell'angolo $\frac{z}{c}$, onde ci si presenti

$\frac{z}{c} = 1891811,3605''$

$\log = 6,2768778$

sottra $5,3144251$

$l\frac{z}{c} = 0,9624527$

sottr. $l\frac{\alpha}{c} = 1,3100632$

$l\frac{z}{\alpha} = 9,6523895$

aggiungi $l\,2 = 0,3010300$

$l\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = 9,9534195$

$\frac{z}{\frac{1}{2}\alpha} = \frac{CBe}{CA} = 0,8982961$ (Fig. 24)

Schadiasma XI.

Sezione I

\#

XXIV. Egli è di uopo confermare colla esperienza le verità insegnateci dalla teorica, e lo posso fare dal paragonare insieme i suoni principali, cioè a dire i più gravi di varj cilindri. Feci lavorare tre cilindri di acciajo A, B, C, ed ordinai, che i due primi fossero egualmente grossi, e diversamente lunghi in ragione di √2 : 1. Il primo ed il terzo dovevano avere eguali le lunghezze, ed ineguali i diametri in proporzione di 4 : 5. L'Artefice non eseguì esattissimamente la mia intenzione, e le misure dei cilindri furono le seguenti, come per me si esprimono in linee del piede Real di Parigi.

Misure del cilindro A. D = lin. 9, L = lin. 86

Misure del cilindro B. D = lin. 9, L = lin. 61

Misure del cilindro C. D = lin. 11½, L = lin. 87

Differendo i due cilindri A, B solamente nella lunghezza, i loro suoni devono corrispondere in ragione inversa duplicata delle lunghezze, cioè a dire come $\overline{61}^2 : \overline{86}^2$, o sia come 3721 : 7396. Questo rapporto si accosta molto al semplice 1 : 2 proprio dell'Ottava, ed il divario consiste nella proporzione 7396 : 7442, o sia nella proporzione 161 : 162, metà presso a poco eguale del comma 80 : 81. In prova che giusta trovai, che fatti percossi i cilindri A, B, i loro suoni in Ottava un poco calante si ritrovavano.

Giusta il canone da me stabilito i suoni dei cilindri A, C devono stare in ragione composta, diretta semplice dei diametri, ed inversa duplicata delle lunghezze, vale a dire come $\frac{9}{\overline{86}^2} : \frac{11\frac{1}{2}}{\overline{87}^2}$. Questa proporzione riducesi alla seguente 68121 : 85054, la quale discorda pochissimo dalla semplice 4 : 5 conveniente alla Terza maggiore. La differenza s'eguaglia al rapporto 85054.00 : 85151.25, cioè

\# Confermasi colla esperienza la scoperta legge dei suoni dei cilindri.

Schadiasma XI.

cioè prossimamente tra 4.7 circa 4.8 6, un=
decima parte all'incirca del Comma 80:81
memoria così piccola, che non viene dall'
orecchio anche più esperto notata. Posti al
confronto i suoni dei due cilindri A, C
uniformavano esattamente alla teoria, ed
il cilindro più grosso C rese un suono una
Terza maggiore più acuto di quello del cilindro
più sottile A.

Scolio II

XXXII. Mi risolvo all'esame dei suoni, che giusta le varie
specie di oscillazioni un cilindro produce.
Io primieramente trovai con diligenza a mar=
tello, e limai un cilindro C di acciajo, ed
indi ne feci gittare un altro D di bronzo,
il quale fu poscia ripulito sul tornio, e ridotto
alla maggiore esattezza, che fu possibile.
Misure del cilindro C di acciajo: D = lin. 6, L = lin. 15[illegible]
Misure del cilindro D di bronzo. D = lin. 6, L = lin. 15[illegible]
Gli volli assai sottili rispettivamente alle loro
lunghezze, e sollevai, che il loro suono più
grave riuscisse muto; perchè si rendessero in-
sibili i suoni acuti, che non intervenivano
quando la grossezza alla lunghezza ha quella
proporzione, che si trova, acciocchè il suono
principale, e più grave acquisti corpo e si
faccia udire grato al sensorio.
Segnai accuratamente i nodi o punti stabili in
riguardo ai diversi generi di vibrazioni,
e sottoposti a sì fatti punti i sostegni, si
sentirono chiari e distinti i sei primi suoni
in ambo i cilindri. Avendo dentro questi
limiti ristretti i miei calcoli, non mi sono
ulteriormente esteso ne' pure colle osservazioni.
Avverto, che i sostegni devono essere vestiti
di una materia cedente, per esempio di panno.
Io mi servj di due funicelle, le quali erano forse
un po' troppo dure, e credo, che sarebbero
meglio riusciti due grossi spaghi. Anche re=
lativamente alle corde, mentre si vogliono far
suonare divise in parti aliquote, bisogna
adoprare

adoprare degli ostacoli leggieri, e appoggiarli
ad un di quei punti, che separano una parte
aliquota dall'altra. Veggasi ciò che io scrissi
in tale proposito ai numeri XX. e XXI. dello Schediasma IV., che tratta
delle vibrazioni delle corde sonore.

Accordai all'unisono col suono principale del
cilindro α. di acciajo una corda divisa in parti
60, ed un'altra corda egualmente lunga, e
similmente partita la ridussi all'Ottava alta
del suono principale del cilindro β di bronzo.
Rendeva questo un suono talmente grave,
che mettendo con esso all'unisono la suddetta
corda avrebbe della sonorità fatto perdita.
Per separare poi dal rimanente quelle, coi cui
di corda, che sono unisone ai suoni 2°, 3°,
4° &c. dell'uno, e dell'altro cilindro ho posto
in opera uno scannello, la cui base s'agguaglia
ad una porzione sessantesima della corda, ed
è distribuita in parti 10. Con questo arti=
ficio s'ottiene la divisione della corda in
parti 600.

Nel numero XXVI. ho posto ~~Ho detto compiutamente al Problema VI col porre~~
in serie le porzioni della corda 60., che
secondo la teoria devono stare all'uni=
sono coi suoni acuti di un cilindro nella
supposizione, che il suono più grave sia
unisono alla corda intera. Questa pro=
porzione serve per il cilindro α di acciajo,
ed in riguardo al cilindro β di bronzo,
il cui suono principale è unisono alla
corda 120 si avrà da prendere por=
zioni il doppio lunghe delle mentovate.

(— a capo)

// Le seguenti Tavole sono formate da tre [?]
colonne. I numeri della prima esprimono
la specie delle vibrazioni. La seconda
contiene le porzioni della corda 60, che
giusta la teoria devono corrispondere
all'unisono coi suoni acuti dei cilindri.
Nella terza si comprendono le parti della
stessa corda, che posta in opera la maggiore
attenzione si sono trovate unisone ai suoni
nominati

Schadiasma XI.

* Domenico Bianchi valente organista, ed accuratissimo accordatore di gravecembali.

nominerò; prestandomi diligente assistenza il Signor *

Porzioni della corda 60 unisone ai suoni acuti del cilindro e di acciajo nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla detta corda 60

Generi delle vibrazioni	Lunghezze delle porzioni giusta la teorica	Lunghezze delle porzioni giusta l'esperienza
I	60	60
II.	21,75	21,75
III.	11,1	11,15
IV	6,717	6,9
V.	4,495	4,7
VI.	3,219	2,9

Porzioni della corda 60 unisone ai suoni acuti del cilindro 7 di bronzo nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda 120.

Generi delle vibrazioni	Lunghezze delle porzioni giusta la teorica	Lunghezze delle porzioni giusta l'esperienza
I	120	120
II.	43,5	43,5
III.	22,2	22,3
IV.	13,434	13,6
V.	8,992	9,2
VI.	6,434	6,7

Per vero dire il cilindro 7 di bronzo era di figura più esatta di quello di acciajo, ed oltre a ciò di materia più uniforme, ed omogenea, siccome formato per via di fusione. E quindi le sue voci acute con più aggiustatezza di quelle del cilindro e di acciajo si accomodavano ai suoni dalla teorica determinati. La maggior differenza

in ambo

in ambo i cilindri s'udiva nel terzo suono il quale nel cilindro di acciajo eravi sopra il corrispondente stabilito col computo per la ragione 2900 : 3219 o sia prossimamente per qualche cosa meno di 9:10, che è prima dire per un Tuono, un poco calante. All'incontro nel cilindro di bronzo il predetto suono calava dall'analogo, trovato dal calcolo per il rapporto 6700 : 6436; cioè per una proporzione media fra le due 25:24, 26:25 esprimente un Semituono minore scarso. I notati opposti divarj danno a conoscere, che se si fosse un cilindro di perfettissima figura, e composto d'una materia egualmente omogenea renderebbe i suoni esattamente unisoni a quelli, che mi è riuscito di scoprire nella presente Dissertazione.

Scolium III.

Determinare la proporzione fra la rigidità dello acciajo, e del bronzo, dai quali erano composti i cilindri usati nel riferito esperimento.

Determinare la proporzione fra le rigidità dello acciaio, e del bronzo, onde erano formati i nostri cilindri. Ho notato nel Corollario 3. del quarantesimo nel numero XXV., che mentre due cilindri oscillano unisoni, le loro rigidità r stanno come $\frac{S^2 L^4 g}{D^2}$. essendo il diametro D costante in ambedue i cilindri a, 7, le masse M stanno come Lg, e le rigidità r come $S^2 L^3 M$. Il cilindro di bronzo era unisono a parti 91½ della corda 60 unisona al cilindro di acciaio, e quindi i suoni S dei due cilindri di acciajo e di bronzo si riguardavano nella ragione 91½ : 60 ma; ossia 61 : 40. Ho già detto nel precedente numero XXXI. che le lunghezze L stavano il rapporto 259 : 257½, cioè in numeri interi 518 : 515. Pesò il cilindro a oncie 25, il cilindro 7 oncie 27, e per conseguenza le masse M si riferivano nella ragione 25 : 27.

XXXII. Non tralascio di determinare la proporzione fra la rigidità &c.

Sostituiti

Schadiasma XI.

Cominciato li 14 9bre 1757

Sostituiti in cambio delle specie analitiche i convenienti valori; troveremo le rigidità dello acciajo e del bronzo componenti i nostri ~~cilindri [illegible]~~ o sia ridotti i computi come ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ cilindri come $\overline{61}^2 \cdot \overline{518}^3 \cdot 25 : \overline{40}^2 \cdot \overline{515}^3 \cdot 27$, o sia ridotti i computi come 5171446060472 : 2377544232000, proporzione che sta di mezzo fra le due 24 : 11, 13 : 6, avvicinandosi per altro più alla prima, che alla seconda.

* ~~[illegible]~~

~~diametri uguali, ... si scoprirà~~

~~che ... stanno ...~~

~~di ... ecc.~~ #

XXXIII. Chiudo la mia fatica collo stabilire la ragione fra la lunghezza, ed i ~~cilindri~~ diametri dei cilindri gravi, ed acuti, affinchè rendano suoni ugualmente forti, e aggradevoli.

Cilindri ~~Strumento composto di 9 cilindri~~ compongano uno Stromento di metallo, o di vetro, i quali si percuotono con eguali forze vive, e per conseguenza oscillando per le pari forze vive fanno l'acquisto. Collo stesso metodo usato in riguardo alle corde sonore nello Schediasma VI. dimostrerò, che tali cilindri rendono suoni ugualmente forti. Questi suoni in oltre devono riuscire del pari aggradevoli, il che dipende dalla proporzione fra la lunghezza ed i diametri dei varj cilindri, la quale mi faccio ad indagare presentemente. Qualche tentativo da me eseguito non si estendeva, salvo che per due Ottave ed era formato di cilindri, che differivano solo nella lunghezza. Per vero dire i cilindri dovevano andare in difetti opposti; imperciocchè i cilindri più gravi erano troppo pieghevoli, e producevano suoni poco distinti senza corpo. All'incontrario, i cilindri più acuti erano troppo grossi, e poco flessibili, dimodochè i loro suoni si impicciolivano, ottusi.

La massa M, m di due cilindri della stessa materia stanno come $LD^2 : ld^2$, e giacchè sono pari ~~...~~ le forze vive MV^2, mu^2 si ~~adempia~~ verifica l'analogia $V : u :: \frac{1}{L^{\frac{1}{2}}D} : \frac{1}{l^{\frac{1}{2}}d}$. Si assegni alle velocità la legge adottata = mente media fra i limiti stabiliti ai numeri X., e XI. dal citato Schediasma VI ~~nello Schediasma~~ onde si abbia

$V : u :: \frac{1}{T^{\frac{3}{4}}} : \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$, e scopriremo = remo allora $L^{\frac{1}{2}}D : l^{\frac{1}{2}}d :: T^{\frac{3}{4}} : t^{\frac{3}{4}}$

a

~~Problema VI.~~

Determinare la proporzione fra la lunghezza ed i diametri dei cilindri gravi ed acuti; acciocchè rendano suoni del pari forti, e aggradevoli.

Nota

~~Trattando~~ questo Schediasma soltanto ~~di corde sonore~~ dei solidi ~~...~~ elastici, il Problema ~~...~~ si è tralasciato

+ Ci insegna il corollario 4. contenuto nel numero XXV. che se due cilindri formati dalla stessa materia si vibrano simultaneamente, stanno i loro suoni come $\frac{D}{L^2} : \frac{d}{l^2}$; ma i tempi delle vibrazioni seguono la ragione inversa dei suoni; dunque $T : t :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$, e perciò

e conseguentemente

$L^{\frac{2}{3}} D^{\frac{4}{3}} : l^{\frac{2}{3}} d^{\frac{4}{3}} :: T : t$. + ~~Ma siccome~~ è ~~stato da me dimostrato in altra occasione~~ ~~$T : t ::$~~ $\frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$; dunque

$L^{\frac{2}{3}} D^{\frac{4}{3}} : l^{\frac{2}{3}} d^{\frac{4}{3}} :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$, analogia,

da cui derivano le due seguenti

$L : l :: D^{\frac{7}{4}} : d^{\frac{7}{4}}$; $D : d :: L^{\frac{4}{7}} : l^{\frac{4}{7}}$.

Nel canone de' tempi delle vibrazioni $T : t :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ si sostituiscano prima in cambio di L, l, indi in vece di D, d i valori loro proporzionali, e si troveranno effettuati i necessari calcoli;

$D : d :: T^{\frac{2}{5}} : t^{\frac{2}{5}}$; $L : l :: T^{\frac{7}{10}} : t^{\frac{7}{10}}$.

Regolate a norma di queste leggi le dimensioni dei cilindri, riuscivano i loro suoni egualmente grati all'orecchio.

Siano bene s'illustrava la teoria con un esempio. Due cilindri si corrispondano in quintupla Ottava, onde sia

$T : t :: 32 : 1 :: 2^5 : 1$.

Fatto uso di tali valori in luogo dei tempi T, t, si ripresenterà

$D : d :: 4 : 1$,

$L : l :: \sqrt{128} : 1$, e prossimamente

~~[illegible]~~ $11,3137 : 1$.

Assai prossima alla prescelta sarebbe la legge $V : v :: \frac{1}{T^{\frac{2}{3}}} : \frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}$, da cui si dedurrebbe $D^2 : d^2 :: L : l$; ~~[illegible]~~ $L : l :: T^{\frac{2}{3}} : t^{\frac{2}{3}}$. $D : d :: T^{\frac{1}{3}} : t^{\frac{1}{3}}$; La sua maggiore semplicità renderebbe la misura dei cilindri più facile da conteggiare.

essendo

Schediasma XI.

XXIV. Concciossiachè gli stromenti composti di cilindri ~~Conciossiachè gli stromenti di cilindri composti~~ sono di poco uso, e se ne lavorino in piccola quantità, non han potuto gli industriosi artisti colle replicate sperienze condurli a quella perfezione, di cui sono capaci. Giudico adunque opportuna cosa il distendere una Tavola, che per lo spazio di una Ottava contenga le lunghezze, ed i diametri dei cilindri secondo la perfetta legge $L : l :: T^{\frac{7}{10}} : t^{\frac{7}{10}}$, $D : d :: T^{\frac{2}{5}} : t^{\frac{2}{5}}$. La nominata Tavola è formata di sei colonne. La prima comprende le lettere naturali, e le modificate dal Diesis, e dal Bemolle disposte conforme la Scala degli usuali stromenti da tasto, prima per brevità letterali. Nella seconda colonna stanno disposti i Logaritmi dei suoni convenienti a ciascuna lettera, e rinvenuti conforme il metodo altrove da me spiegato*. Contiene la terza colonna i Logaritmi delle lunghezze dei cilindri componenti la detta Scala, i quali battuti con forze vive eguali hanno da rendere suoni, che riescano egualmente grati all'orecchio. Stanno collocate ordinatamente nella quarta colonna le lunghezze di essi cilindri. Seguono finalmente le colonne quinta, e sesta, e si veggono registrati in quella i Logaritmi dei diametri dei nostri cilindri, in questa le misure dei diametri stessi. Le colonne principali rispettivamente alle presenti ricerche sono la quarta, e la sesta, in grazia delle quali sono poste le colonne seconda, terza, e quinta.

Ecco il metodo da me tenuto, per determinare le colonne quarta, e sesta. Sia l la lunghezza di un cilindro, d il diametro, t il tempo di una vibrazione,

n

* nel Saggio sopra le leggi del Contrappunto pag. 116.

n il numero delle oscillazioni fatte in tempo dato, o sia il suono di esso cilindro. Ho provato nel precedente numero XXXIII. dover essere l come $t^{\frac{7}{10}}$; ma t come $\frac{1}{n}$; dunque l come $\frac{1}{n^{\frac{7}{10}}}$. E passando dalla analogia alla equazione $l = \frac{L}{n^{\frac{7}{10}}}$; (L) è una costante da determinarsi in progresso. Dai numeri facendo transito ai logaritmi, mi si presenta la formola $\log. l = \log. L - \frac{7}{10} \log. n$. Mi insegna questa a stabilire il valore della costante L. Il logaritmo del suono n prodotto dal cilindro C base dello stromento si eguaglia a nulla; dunque in tal caso $\log. l = \log. L$, e per conseguenza $l = L$, cioè a dire la costante L eguale alla lunghezza l del cilindro C base dello stromento, la quale si suppone nella mia Tavola divisa in parti 100.00. Si troverà per tanto il logaritmo della lunghezza l di un cilindro detraendo dal $\log. L$ o sia dal logaritmo del numero 100.00 le sette decime parti del logaritmo del suono, che il detto cilindro deve produrre. Determinato così $\log. l$, la tavola dei logaritmi mi addita il valore della lunghezza cercata l.

In riguardo ai diametri dei cilindri ho dimostrato essere d come $t^{\frac{2}{5}}$, come $\frac{1}{n^{\frac{2}{5}}}$. Quindi ne nascono le formole $d = \frac{D}{n^{\frac{2}{5}}}$; $\log. d = \log D - \frac{2}{5} \log. n$. (D) è il diametro del cilindro C base dello stromento, che suppongo diviso in parti 10.00. Sottratta dal log. 10.00 le due quinte parti del log.[mo] del suono n, che deve rendere il cilindro; ne risulterà il logaritmo del diametro d, la di cui misura verrà resa nota dalle Tavole logaritmiche. Sarà facile l'ampliare la seguente Tavola alle 12,

alle

alle quattro, alle cinque Ottave, valendosi della regola del tre. Quella stessa proporzione, che ha C, la cui lunghezza 100.00, a C^H, la cui lunghezza 96.40, la serba pure C, la cui lunghezza 37.49 a C^H; che posta in uso la nominata regola si troverà lungo 36.503. Con pari metodo si scoprirà il diametro del detto C^H 5.62, e si passerà poscia a stabilire le dimensioni, di D, di C^b, di C &c.

Sebbene poteva bastare il dilatar la Tavola ad una sola Ottava. Determinato il secondo C, che in relazione al primo è lungo 50.00, grosso 2.54, seguendo per tutte le mentovate maniere, e dividendo la lunghezza in parti 100.00, il diametro in parti 10.00, chiaramente si scoprirà, che la distribuzione della prima Ottava serve parimente per la seconda, e per tutte l'altre, che seguono.

Si osservino nella Tavola posti in opera due punti, che separano dall'altre le due ultime cifre dei numeri esprimenti le lunghezze, ed i diametri dei cilindri. Ho fatto ciò, perchè sarà sufficiente per la pratica, che si dividano la lunghezza del cilindro C base dello Stromento in parti 100, ed il diametro in parti 10. I due ultimi numeri sono frazioni, che hanno per denominatore, o sia divisore il numero 100. Per modo d'esempio la lunghezza 45.32 del cilindro C nella prima Ottava vuol essere determinata di parti $45 + \frac{32}{100}$, cioè a dire prossimamente di parti $45 + \frac{1}{3}$. E così il diametro del cilindro G nella Ottava terza espresso per 4.51 s'eguaglierà a parti $4 + \frac{51}{100}$, o sia prossimamente a parti $4 + \frac{1}{2}$.

Per valersi esattamente della nostra Tavola fra varj cilindri pari di diametro, e diversi di lunghezza, bisogna scegliere quello, che essendo il meno rigoroso, e sicuro, escluderà

gli altri

Schediasma XI

gli altri, che o per essere troppo lunghi rispettivamente alla grossezza producono un suono snervato, e senza corpo, o per essere troppo corti tramandano un suono troppo acuto, ed aspro. Se il cilindro prescelto si trova unisono col C basso di uno stromento cognito, s'intenda divisa la sua lunghezza in parti 100.00, il suo diametro in parti 10.00, ed in relazione a tali divisioni si stabiliscano le misure dei cilindri più acuti a norma della mia Tavola. Che se lo scelto cilindro fosse unisono ad un altro suono per esempio A della prima Ottava; dovendo essere giusto la regola la lunghezza di un tal cilindro 69 65, ed il diametro 4.13; nei detti numeri di parti 69.65, 4.13 si concepiscano distribuiti la lunghezza, ed il diametro del, ed in riguardo a sì fatti compartimenti si determinino coll'aiuto della mia Tavola le dimensioni dei cilindri più gravi, e più acuti del dato cilindro A.

Se la lunghezza, ed il diametro del cilindro prescelto fossero dati per esempio in linee, si potranno trovare le misure degli altri cilindri espresse parimente in linee col mezzo della regola del tre. Siano cogniti in linee la lunghezza, ed il diametro del cilindro A appartenente alla prima Ottava, e si voglia sapere di quante linee devono esser composti la lunghezza, ed il diametro del cilindro C basso dello stromento. Si faccia come la lunghezza del cilindro A a quella del cilindro C notate nella mia Tavola, cioè come 69 65 a 100 00; così il numero di linee, che formano la lunghezza del cilindro A, al quarto termine proporzionale, il quale si agguaglierà al numero delle linee, che hanno da formare la lunghezza del cilindro C. Non altrimenti se faremo come 4.13 a 10.00 diametri, che la mia Tavola assegna ai cilindri A, C; così il numero delle linee, onde consta

A

il diametro

il diametro del cilindro A al quarto termine proporzionale; pareggerà questo il numero delle linee componenti il diametro cercato del cilindro C.

In uno Strumento lavorato conforme il mio metodo gli scannelli, su i quali si appoggiano i cilindri, e che devono ricadere sotto i loro circoli di ammovimento, hanno ad essere di figura curva, la quale facilmente si descrive, essendo nota dei mentovati circoli la posizione.

162. Lunghezze, e diametri dei Cilindri per l'estensione di due Ottave temperate conforme il mio metodo. (Schediasma XI.)

Logaritmi dei suoni	Logaritmi delle lunghezze dei Cilindri	Lunghezze dei Cilindri	Logaritmi dei diametri dei Cilindri	Diametri dei Cilindri
C 0,000 0000	4,000 0000	100.00	3,000 0000	10.00
C♯ 0,022 7556	3,984 0711	96.40−	2,990 8978	9.79
D 0,049 2485	3,965 5260	92.37−	2,980 3006	9.56
E♭ 0,075 7412	3,946 9812	88.51−	2,969 7035	9.33
E 0,098 4969	3,931 0522	85.32+	2,960 6013	9.13+
F 0,125 8909	3,911 8764	81.63+½	2,949 6437	8.91−
F♯ 0,148 1958	3,896 2629	78.75+	2,940 7217	8.72+
G 0,175 1392	3,877 4026	75.40+½	2,929 9443	8.51+
G♯ 0,198 3454	3,861 1582	72.64−	2,920 6618	8.33+
A 0,224 3876	3,842 9287	69.65+	2,910 2450	8.13+
B♭ 0,251 3310	3,824 0683	66.69+	2,899 4676	7.93−
B 0,273 6360	3,808 4548	64.34−	2,890 5456	7.77+
C 0,301 0300	3,789 2790	61.56−	2,879 5880	7.58−
C♯ 0,323 7855	3,773 3501	59.34+	2,870 5650	7.42+
D 0,350 2784	3,754 8051	56.86−	2,859 8886	7.24+
E♭ 0,376 7712	3,736 2602	54.48+	2,849 2915	7.07−
E 0,399 5268	3,720 3312	52.52+	2,840 1893	6.92+
F 0,426 9208	3,701 1554	50.25+	2,829 2317	6.75−
F♯ 0,449 2259	3,685 5419	48.48−	2,820 3097	6.61+
G 0,476 1692	3,666 6816	46.42−	2,809 5323	6.45−
G♯ 0,499 3754	3,650 4372	44.71+	2,800 2498	6.31+
A 0,525 4176	3,632 2077	42.88−	2,789 8330	6.16+
B♭ 0,552 3610	3,613 3473	41.05+	2,779 0556	6.01+
B 0,574 6660	3,597 7338	39.61−	2,770 1336	5.89+
C 0,602 0600	3,578 5580	37.89+	2,759 1760	5.74+

…ccers.
…Lind.

…·00
…·79+
58
33
…13+
91-
72+
51+
33+
13+
93+
77+
54-
42+
24+
07-
92+
75-
61+
4·5-
31+
16+
01+
89+
74+

c

c

D

e

e

F

F

G

G

A

A

A

C

C

[illegible]

e

e

[illegible]

F

G

G

A

A

A

C

C
C
D
E
E
F
F
G
G
A
B
B
C
C
D
E
E
F
F
G
G
A
B
B
C

Dalla comunicazione di moto fra due corpi molli, o elastici perfettamente, e specialmente di quella, che si effettua col mezzo di una corda elastica.

I. La comunicazione del moto fra due corpi si effettua certamente col mezzo di una forza media, la quale conforme la varia circostanza accelera un corpo, e ritarda l'altro, o pure gli ritarda, o accelera tutti e due. Benchè sia generalmente ignota la legge, con cui questa forza vada variando, il che dipende dalla figura dei corpi, e dalla relazione fra le compressioni dei corpi stessi, e le forze comprimenti; tuttavia dalla sola natura della forza media si deducono tutte le velocità corrispondenti, da cui sono animati i corpi durante la comunicazione del moto, le quali al mutarsi della legge della forza media non patiscono alterazione veruna. E questa è la ragione per cui al cangiamento di figura, e di rigidità nei corpi, purchè siano molli, o elastici perfettamente, rimangono invariati i canoni della comunicazione del moto fra i corpi ~~molli, od elastici~~ dall'una, o dall'altra specie, i quali canoni si debbono ripetere necessarj, avendo in altra occasione dimostrata altresì indipendente la legge delle azioni delle forze continuamente applicate. // Si ricava inoltre un'altra curiosissima proprietà, che per quanto si muti l'indole della forza media, avrà ella sempre conservata la stessa somma di reazioni, quando i due corpi sono forniti di quella tal somma di velocità, e questa somma sarà massima quando i due corpi camminano con eguale velocità, e siccome si eguaglia a nulla nel primo istante della comunicazione del moto, ha parimente lo stesso valore nell'ultimo istante della comunicazione medesima. // Dalla natura della stessa forza media dipende, che si conservi sempre o la stessa somma, o la stessa differenza delle quantità di moto primitive, secondo che le velocità iniziali hanno la medesima direzione, oppure una direzione contraria. (// a capo)

(a capo) Aggiungasi, che ~~in pari tempo~~ i corpi che si ammaccano, mentre fanno transito dalla velocità primitiva ~~a quella~~ ad ambedue comune, si ammaccano in ~~quello~~ stesso tempo, pari all'altro, in cui ripigliano la loro figura, se sono elastici, passando dalla velocità comune alle terminali. Quanta ~~si~~ variazione ha eccitata la forza media nel primo tempo, altrettanta averne eccitata nel secondo; e quindi nell' terminata la comunicazione del moto, la somma delle forze vive dei corpi si agguaglia a quella, che gli animava in principio. E conciossiacchè in due istanti la forza ~~viva~~ perduta ha lo stesso valore, mentre cioè i corpi si costipano, e mentre si restituiscono; si impiegano tempi eguali a perdere la detta forza, e a ricuperarla.

Si vedrà ancora della forza media influisca soltanto negli spazj passati dai corpi durante la comunicazione del moto, e nei tempi impiegati a percorrerli, cangiando questi spazj, e questi tempi, mentre, secondochè si muta e la figura dei corpi, e la loro durezza, benchè perseverino costanti le loro masse.

II. Dedurrò prima dalla idea della forza media le mutue velocità dei corpi, e tutte le altre proprietà, che ho accennate; + ~~e poscia~~ Passerò poscia a considerare una forza media conosciuta, supponendo che si comunichi il moto col mezzo di una corda elastica, e farò vedere, che al variarsi di questa forza media, nasce mutazione negli spazj, per cui camminano i corpi, mentre si effettua la comunicazione del moto, e nel tempo in

+ e giacchè mi si offrirà la occasione, stabilirò le limitazioni, colle quali si può far uso del metodo del moto traslato, di cui parecchi Autori si sono serviti utilmente. Passerò poscia &c.

(a capo)

cui

esser impiegato. Non lascierò altresì di notare quanto si alterino i detti spazj, e tempo, allorchè si diversificano le masse, e le velocità de' due corpi.

III. La massa M colla velocità A urti direttamente nella massa m, che cammina colla velocità ±a. Se le due velocità sono amendue positive, egli è necessario che sia A > a, onde il corpo M possa urtare nel corpo m. In uno degli istanti della comunicazione del moto si muovono i due corpi colle velocità V, ±v, e sono per conseguenza forniti delle quantità di moto MV, ±mv. La forza media spinge i due corpi, o ritira, o si muove per direzioni contrarie, e vengisce, o agisce per quegli stessi spazj per cui camminano i corpi. Quindi si può usare la formola delle forze riferite ai tempi, la quale ci insegna, che se le velocità V, v hanno la medesima direzione, nel tempuscolo dt quella quantità di moto x si leva al corpo M, quanta se ne aggiunge al corpo m, di modo che le nuove quantità di moto sono MV−x, mv+x. Raccolte queste in una somma restituiscono la quantità precedente di moto MV+mv. Che se la velocità v è affetta dal segno negativo, le due quantità di moto una positiva, e l'altra negativa calano per la stessa misura x nel tempo dt, onde divengono ~~[illegible]~~ MV−x, −mv+x, e formandone la somma ne risulta MV−mv, che è la quantità di moto antecedente. Succedendo ciò in qualunque

Quantunque il Signor ~~[illegible]~~ Leonardo Euler nel tomo quinto degli atti di Pietroburgo, ed il P. Vincenzo Riccati mio fratello nel suo Dialogo delle forze vive dalle leggi delle forze continuamente applicate abbiano dedotte quelle della comunicazione del moto; ho pensato di soluzione di por mano anch'io nella stessa materia a cagione principalmente di spiegare le [illegible] della partecipazione del moto mediante una corda elastica, la cui distensioni rispettivamente alle forze, che le producono, sono state da me determinate nello Schediasma I.

~~[illegible]~~

Determinare le mutue velocità di due corpi molli, o elastici perfettamente, mentre segue fra loro la comunicazione del moto.

qualunque incontro, ne segue necessariamente, che debba sempre conservarsi la primitiva quantità di moto MA ± ma, e che per conseguenza si avrà l'equazione MA ± ma = MV ± mv, dalla quale si deduce $\frac{M.\overline{A-V}}{m} \pm a = v$ (1)

IV. Resti ora i valori ~~velocità~~ corrispondenti delle velocità V, v, i quali nella dipendono dalla figura, e dalla durezza dei corpi M, m, cerchiamo quali grandezze ad essi competono negli ultimi istanti della comunicazione del moto o siano i corpi molli, od elastici. Egli è fuori di dubbio, che sarà compiuta la comunicazione del moto colle leggi dei corpi molli, quando le due masse M, m si muovono con pari velocità per la medesima direzione; imperocchè in tal circostanza il corpo che precede più non resiste a quello, che gli vien dietro; e non potendo i corpi ammaccati ricuperare la loro figura, essendo con siffatte qualità quelli che si suppongono molli, si ancora, o ± variazione della forza media, che alteri la loro velocità. Facendo dunque V = v, avremo la velocità comune ai due corpi nell'ultimo momento della comunicazione del moto fra i corpi molli $\frac{MA \pm ma}{M+m} = V = v$ (2)

*

V. In tutti gli istanti antecedenti quello della comune velocità il corpo M ha sempre urtato il corpo m, che continuamente (oppure ha sostenuto l'urto di quello) gli ha resistito, e perciò nell'istante ultimo l'ammaccatura dei due corpi è giunta al colmo, cioè è quanto a dire è pervenuta alla massima grandezza la variazione della forza media: ma uguale ad essa variazione

(margin:) i quali nella dipendono dalla figura, e dalla durezza dei corpi M, m

* Se da principio le velocità dei due corpi hanno la medesima direzione, anche la velocità comune seguita la direzione primiera. Ma se le predette velocità iniziali sono contrarie, la velocità comune prende la direzione di quel corpo, ch'è fornito di maggior quantità di moto. Sia MA > ma, e la velocità v del corpo m prima di assegnar ~~diversamente~~ più diverrà = 0. In tale istante mi insegna la formula (1) essere $V = \frac{MA - ma}{M}$. Che se MA < ma la velocità V si annulla nell'atto di mutar direzione, e quindi in tal circostanza $v = \frac{MA - ma}{m}$. Ella è poi facile da ricavare la conseguenza, che quando MA = ma, nella ipotesi delle velocità contrarie, la velocità comune non seconda la direzione nè dell'uno, nè dell'altro corpo, laonde ove dee = 0, conforme chiaramente dimostra la formula (2)

varcione assai due la perdita di forza
viva nei corpi M, m; dunque nel mento-
vato istante alla forza viva perduta
il massimo valore compete.

Quando le due masse M, m cammi-
nano colle velocità V, v, sono fornite
della forza viva $\frac{MV^2}{2}+\frac{mv^2}{2} =$

$$\frac{MV^2}{2}+\frac{M^2}{2m}\cdot\overline{A^2-2AV+V^2} \pm Ma\cdot\overline{A-V}+\frac{ma^2}{2} \quad (3)$$

sostituendo in cambio di v il suo valore
somministrato dalla formula (1).
E conciossiachè nel principio della
communicazione del moto fosse la
forza viva $= \frac{MA^2}{2}+\frac{ma^2}{2}$, ne segue
che nella contrazione dei corpi, o sia nella
versione della forza media si sia
consumata la forza viva

$$\frac{MA^2}{2}+\frac{ma^2}{2}-\frac{MV^2}{2}-\frac{M^2}{2m}\cdot\overline{A^2-2AV+V^2}$$

$$\mp Ma\cdot\overline{A-V}-\frac{ma^2}{2} = \frac{Mm-M^2\cdot A^2 \mp 2MmAa}{2m}$$

$$+\frac{2M^2A \pm 2Mma}{2m}\cdot V - \frac{M^2-Mm}{2m}\cdot V^2 \quad (4).$$

Sarà massima questa forza,
qualora la sua flussione si eguagli al
nulla. Presa la differenza, e ridotto
il calcolo scopriremo $V=\frac{MA\pm ma}{M+m}$:
ma quando V ha un tal valore, ad
esso parimente si eguaglia v;
dunque la forza viva perduta è la
massima allorchè i due corpi si
muovono congiuntamente colle stessa
velocità $= \frac{MA\pm ma}{M+m}$ conforme di
sopra aveva già stabilito. Sostituisco
la

la grandezza trovata di V nella formola (4) e ridotto il calcolo ivi si presenta la massima forza viva consumata nella contrazione, o sia nella reazione. Dalla forza media $= \frac{MA^2}{2} + \frac{ma^2}{2} - \frac{M^2A^2 \mp 2MmAa}{2.\overline{M+m}}$

$- \frac{m^2a^2}{2.\overline{M+m}} = \frac{Mm.\overline{A \mp a}^2}{2.\overline{M+m}}$ (5) la quale rimane sempre la stessa, purchè non si alterino le masse M, m, e la quantità, e la direzione delle loro rispettive velocità A, ±a † ~~forza viva perduta si eguaglia alla ... della forza media~~ Ella è dimostrata la proposizione, che per quanto si muti l'indole della forza media al variare della figura, e della diversa dei corpi, sarà sempre essa forza consumata la stessa somma di reazioni, quando le due masse date M, m fornite da principio delle velocità A, ±a siano giunte a cominciare di muoversi colla velocità $\frac{MA \pm ma}{M+m}$.

Lo stesso si verifica anche quando si muovono colle velocità corrispondenti V, $v \mp \frac{M}{m}.\overline{A-V} \pm a$; imperocchè assegnato a V un valore medio fra A, ed $\frac{MA \pm ma}{M+m}$, e sostituitolo nella formola (4) il valore, che ne risulta, dalla forza viva perduta non ha veruna dipendenza dalla figura, e dalla diversa delle masse.

IX. Ora egli è di uopo determinare la velocità terminali dei nostri due corpi, posto che siano elastici. La

VI. † Avverto per altro, che non si varierà la forza viva perduta, quando le masse, e le velocità dei corpi si mutino in modo tale, che la quantità $\frac{Mm.\overline{A \mp a}^2}{2.\overline{M+m}}$ conservi lo stesso valore. Non si muti la grandezza $\frac{Mm}{2.\overline{M+m}}$, e non si altererà la forza viva perduta, purchè la velocità relativa $A \mp a$ dei due corpi rimanga la stessa φ. Ora la velocità relativa non cangia, qualora alle velocità iniziali A, ±a si aggiunga, o si levi la stessa velocità ±b. Se dunque, o non variandosi le masse M, m, o pure variandosi colla condizione, che sia costante il valore $\frac{Mm}{2.\overline{M+m}}$, i corpi si moveranno colle velocità primitive A, ±a, o pure colle altre A±b, ±a±b, si farà sempre la medesima perdita di forza viva. Quindi o si muovano i due corpi M, m colle velocità A, ±a sopra una nave ferma, o pure sopra una nave, che cammini

φ la quale si eguaglia ad A−a se i corpi si muovono per la medesima direzione, e ad A+a, se la direzione è contraria

contusione giunta al massimo allora quando i due corpi camminano colla comune velocità $\frac{MA \pm ma}{M+m}$, si restituisca nei corpi elastici, i quali ricuperano la loro primitiva figura. Mentre i corpi passano dalla velocità iniziale alla comune, l'elastro si carica, e questo poi si scarica, mentre i corpi elastici passano dalla velocità comune alla finale: e quanta forza viva si è consumata nel caricar delli elastri, o sia nella ritrazione della forza media, altrettanta se ne riacquista nello svolgersi delli elastri stessi, o vogliam dir nella azione della forza media predetta. Quindi terminata la comunicazione del moto la forza viva perduta ha da annullarsi, e svanire per conseguenza la forza media, la quale non può più alterare le velocità dei corpi. Posta per mano la formola (4) esprimente la diminuzione della forza viva perduta, si faccia essa eguale a nulla, onde ne nasca l'equazione, dividendo per $\frac{M}{2m}$,

$$\overline{m-M}\cdot A^2 \mp 2mMa + \overline{2MA \pm 2ma}\cdot V - \overline{M-m}\cdot V^2 = 0.$$

Maneggiata questa formola colle note regole, finalmente si scopre

$$V = \frac{MA \pm ma}{M+m} \mp \frac{m\cdot\overline{A \mp a}}{M+m} = \begin{cases} \frac{\overline{M-m}\cdot A \pm 2ma}{M+m} \quad (6) \\ A \end{cases}$$

Si osservi, che la forza viva perduta è eguale a nulla in due casi, cioè a dire nel principio, e nel fine della comunicazione del moto. Supponendo dunque nulla la detta forza

per la direzione della comunicazione del moto colla velocità $\pm b$, onde rispettivamente allo spazio immobile i corpi predetti siano forniti della velocità $A \pm b$, $\pm a \pm b$, seguirà sempre nello aggregato dei due corpi la medesima perdita di forza viva; e perciò il moto traslato non cagiona alterazione veruna nella mentovata perdita di forza viva.

VII. Se qualcuno pretendesse, che il moto traslato valesse alterare la forza viva perduta, o acquistata da ciascun corpo, si ingannerebbe a partito. Illustro la seconda con un esempio. Dentro una nave si muovano i corpi M, m colle velocità A, $-a$, e giunto il corpo M alla velocità comune anche ancora su $= \frac{MA - ma}{M+m}$ avrà perduta la forza viva $\frac{MA^2}{2} - \frac{M}{2}\left(\frac{MA - ma}{M+m}\right)^2$, e se la velocità comune sia nulla, il che succede, quando $MA - ma = 0$, avrà scapitata la intera forza viva $\frac{MA^2}{2}$. Venga impressa alla nave la velocità $-A$, ed accadrà, che riguardo allo spazio immobile

imobile il corpo M ma in quiete, ed il corpo m camminare colla velocità $-A-a$: terminata la comunicazione del moto colla legge dei corpi molli, i due corpi viaggeranno colla comune velocità $\frac{\overline{M-m}.A\pm a}{M+m}$ ~~=qA ed il corpo~~ M ~~in cambio~~ di perdere ~~la forza viva $\frac{MA^2}{2}$, avrà guadagnata la forza viva $\frac{M.\overline{m^2A+a}^2}{M+m}$~~ nella ipotesi di $MA-ma=0$, ed il corpo M in vece di perdere la forza viva $\frac{MA^2}{2}$, ne avrà fatto acquisto. Nel caso della nave quieta la forza media si oppone al verso del corpo M, e colla sua diminuzione ne diminuisce la forza viva. Ma nel caso della nave in moto, eccito da principio privo di velocità il detto corpo, la forza media avuta anche dalla parte dello stesso, e forza viva gli imprime. VIII. Ritorno sul sentiero, e poiché la massima forza viva perduta dall'aggregato dei due corpi per una parte non dipende dalla legge, cioè cresce

lora, ho da trovare due valori della velocità V, uno competente al primo istante della comunicazione del moto, e l'altro all'ultimo: ma A è la primitiva velocità del corpo M; dunque $\frac{\overline{M-m}.A\pm 2ma}{M+m}$ è la velocità terminale. || Le tre velocità

$$A\ ,\ \frac{MA\pm ma}{M+m}\ ,\ \frac{\overline{M-m}.A\pm 2ma}{M+m}$$

iniziale, media comune ai due corpi, e finale compongono una serie aritmetica decrescente ~~la cui~~ per la differenza $\frac{m.\overline{A\mp a}}{M+m}$, per cui la velocità media è superata dall'iniziale, e supera della terminale.

La formula (1) $\frac{M.\overline{A-V}}{m}\pm a=v$

mi insegna l'ultima velocità del corpo m, sostituendo in cambio di V il terminal valore ~~$\frac{MA\pm ma}{m}$~~ $\frac{\overline{M-m}.A\pm 2ma}{M+m}$. Si scopre pertanto in tal caso $v=\frac{2MA-\overline{M+m}.\pm a}{M+m}$ (3). || Anche le tre velocità

$$\pm a\ ,\ \frac{MA\pm ma}{M+m}\ ,\ \frac{2MA-\overline{M+m}.\pm a}{M+m}$$

primaria, media, ed ultima del corpo m formano una serie aritmetica, con questo divario però, che in cambio di calare, essa cresce per la differenza $\frac{M.\overline{A\mp a}}{M+m}$, per la quale la velocità media eccede la prima, ed è

(il capo) minore

muove della terra.

XII. La forza viva perduta ha sempre due valori uguali, uno mentre si forma la contrazione, e l'altro mentre si restituisca, cioè a dire uno fra la velocità primitiva e la media, e l'altro fra la velocità media e la terminale. L'eguaglianza di tali valori richiede, che le velocità per esempio del corpo M differiscano ugualmente dalla velocità media; il che posto le forze vive perdute si eguagliano in tutti gli incontri. Sieno dunque le due velocità del corpo M

velocità $\frac{MA \pm ma}{M+m} + \frac{x}{M}$, $\frac{MA \pm ma}{M+m} - \frac{x}{M}$,

[illegible]

[illegible] (4.)

[illegible]

[illegible] il corpo m si avverrà [illegible]

avrà la velocità corrispondente

$\frac{MA \pm ma}{M+m} - \frac{x}{m}$, $\frac{MA \pm ma}{M+m} + \frac{x}{m}$

così richiedendo la proprietà dimostrata, che si conservi costante la quantità primitiva di moto $MA \pm ma$. Se sono uguali le forze vive perdute [illegible] passare altresì uguaglianza fra l'aggregato delle forze vive dei corpi M, m, nelle due notate circostanze. In fatto scegliendo la prima coppia delle velocità dei corpi M, m, avremo la loro forza viva $\frac{MV^2 + mv^2}{2}$

$= \frac{M}{2}\left(\frac{MA \pm ma}{M+m}\right)^2 + \left(\frac{MA \pm ma}{M+m}\right) \cdot \frac{2x}{M} + \frac{x^2}{M^2}$

crescesse cela la forza media, e per l'altra si eguaglia alla variazione della forza media perduta, colla è dimostrata la proprietà &c. (La continuazione si trova al segno ◇ pag. 168.)

La differenza $\frac{m \cdot A \mp a}{M+m}$, per cui la velocità primitiva del corpo M supera la media, e questa la finale, conserverà lo stesso valore, quando non si variavano né le masse M, m, né la velocità relativa $A \mp a$. Lo stesso dicasi della differenza $\frac{M \cdot A \mp a}{M+m}$, per la quale la velocità iniziale del corpo m viene superata dalla media, e questa dalla terminale. Ora la velocità relativa non si muta, qualora alle velocità primitive A, a si aggiunge, o si leva la stessa quantità b. Per la qual cosa accrescin[do] o diminuita la velocità primitiva per la grandezza b

b, avremo le seguenti due serie, che esprimeranno la velocità iniziale, media, e finale dei corpi M, m:

$A \pm b$, $\frac{MA \pm ma}{M+m} \pm b$, $\frac{\overline{M-m}.A \pm 2ma}{M+m} \pm b$;

$\pm a \pm b$, $\frac{MA \pm ma}{M+m} \pm b$, $\frac{2MA - \overline{M+m}.\pm a}{M+m} \pm b$.

Quindi rettamente argomento, che anco le velocità iniziale, media, e finale dei due corpi M, m; che si comunicano il moto dentro una nave quieta, eguali ai termini delle due serie

A, $\frac{MA \pm ma}{M+m}$, $\frac{\overline{M-m}.A \pm 2ma}{M+m}$

$\pm a$, $\frac{MA \pm ma}{M+m}$, $\frac{-\overline{M-m}.\pm a + 2MA}{M+m}$

imperocchè alla nave per la direzione della comunicazione del moto, la velocità $\pm b$, onde i corpi da principio si movono rispettivamente allo spazio immobile colle velocità $A \pm b$, $\pm a \pm b$ in riguardo di detto spazio si avranno, le velocità media, e finale, aggiungendo alle precedenti la velocità $\pm b$ della nave. Il moto traslato adunque si può usare con sicurezza, quando si tratta di determinare le velocità dei corpi, che si comunicano il movimento.

$$\frac{+m}{2}\left(\frac{MA \pm ma}{M+m}\right)^2 + \left(\frac{MA \pm ma}{M+m}\right).\frac{-2x}{m} + \frac{x^2}{m^2}$$

$$= \frac{\overline{MA \pm ma}^2}{2.\overline{M+m}} + \frac{x^2}{2M} + \frac{x^2}{2m}$$

L'altra coppia delle velocità dei corpi M, m mi dà la loro forza viva $\frac{MV^2 + mv^2}{2} =$

$$\frac{M}{2}.\left(\frac{MA \pm ma}{M+m}\right)^2 + \left(\frac{MA \pm ma}{M+m}\right).\frac{-2x}{M} + \frac{x^2}{M^2}$$

$$+\frac{m}{2}.\left(\frac{MA \pm ma}{M+m}\right)^2 + \left(\frac{MA \pm ma}{M+m}\right).\frac{2x}{m} + \frac{x^2}{m^2}$$

$= \frac{\overline{MA \pm ma}^2}{2.\overline{M+m}} + \frac{x^2}{2M} + \frac{x^2}{2m}$ uguale a quella, che ho in primo luogo scoperta.

Se dunque è pari la forza viva perduta, l'elastro interposto fra i due corpi è in ambo gli incontri ugualmente caricato, e per conseguenza è uguale la forza media, la quale nel tempicello di ciascuno impiegata nel corpo M in ambo gli incontri dà uguali elementi di quantità di moto, e perciò gli fa perdere due uguali numeri gradi di velocità. Quindi gli due successivi uguali di velocità, mentre il corpo M fa transito dalla velocità iniziale alla media, e da questa alla finale, si effettuano per gradi uguali di tempicelli uguali; laonde nei detti successivi quadratamente da un canto e dall'altro elementi si impiegano tempi uguali. Lo stesso dicasi degli accrescimenti di velocità nel corpo m. Si intende dunque, che in tempi uguali i corpi passano dalla velocità

Non

Schediasma XII.

Aggiunta del m.to XI pag. 173. dopo le parole del moto traslato.

XI. "Che se qualcuno bramasse una dimostrazion generale, che posta V, v la velocità dei corpi M, m, la cui velocità iniziali A, ±a, le corrispondenti velocità degli stessi corpi, che da principio si moveano colle velocità $A \pm b$, $\pm a \pm b$, abbiano ad essere $V \pm b$, $v \pm b$; eccola, ed assai facile. Se V per esempio sia media aritmetica fra A, ed $\frac{MA \pm ma}{M+m}$, anche $V \pm b$ sarà media aritmetica fra $A \pm b$, ed $\frac{MA \pm ma}{M+m} \pm b$. Dovendo passare il corpo M dalla prima velocità $A \pm b$ alla media $\frac{MA \pm ma}{M+m} \pm b$, si ha da dare un istante, in cui sia fornito della velocità $V \pm b$. Supposta dunque nel detto corpo una tale velocità; dico che il corpo m camminerà nello stesso momento colla velocità $v \pm b$. E vaglia il vero, giacchè conservandosi sempre la medesima quantità di moto, nella prima ipotesi $MA \pm ma = MV + mv$, sarà parimente $MA \pm Mb \pm ma \pm mb = M.\overline{A \pm b} + m.\overline{\pm a \pm b} = MV \pm Mb + mv \pm mb = M.\overline{V \pm b} + m.\overline{v \pm b}$: ma $M.\overline{A \pm b}$, $m.\overline{\pm a \pm b}$ sono nella seconda ipotesi la quantità di moto primitiva dei corpi M, m, ed $M.\overline{V \pm b}$ è la quantità di moto attuale del corpo M, la cui velocità $V \pm b$; dunque nello stesso istante la quantità di moto $m.\overline{v \pm b}$ compete al corpo m, il quale per conseguenza procede colla velocità $v \pm b$.

(Il m.to XII. principia alla pag. 171.)

Schediasma XII.

Aggiunta al num.° XIII. pag. 173 dopo la parola dalla forza media dipende.

XIII. Ora si movevano i corpi M, m colle velocità primitive A, ±a, e poi colle altre A±b, ±a±b, onde la velocità relativa A∓a conservi sempre lo stesso valore; la comunicazione del moto o fra i corpi molli, o fra gli elastici si effettuerà in ambo le circostanze nel tempo stesso. Egli è di uopo dimostrare, che quando i corpi M, m camminano nel primo caso colla velocità V, v, e nel secondo colle velocità V±b, v±b, si è fatto perdita del medesimo aggregato di forza viva, e per conseguenza l'elastro medio è ugualmente caricato.

Nel primo caso la forza viva perduta si agguaglia ad $\frac{MA^2}{2}+\frac{ma^2}{2}-\frac{MV^2}{2}-\frac{mv^2}{2}$, e nel secondo la forza viva perduta ha il seguente valore

$$\frac{M}{2}.\overline{A\pm b}^2+\frac{m}{2}.\overline{\pm a\pm b}^2-\frac{M}{2}.\overline{V\pm b}^2-\frac{m}{2}.\overline{v\pm b}^2$$

$$=\frac{MA^2}{2}+\frac{ma^2}{2}-\frac{MV^2}{2}-\frac{mv^2}{2}$$

$$\pm b.\overline{M.\overline{A\pm b}+m.\overline{\pm a\pm b}-M.\overline{V\pm b}-m.\overline{v\pm b}}:$$

ma stantechè si mantiene costantemente la stessa quantità di moto, $M.\overline{A\pm b}+m.\overline{\pm a\pm b}-M.\overline{V\pm b}-m.\overline{v\pm b}=0$; dunque cancellata la quantità $=0$, si trova anche nel secondo caso come nel primo la forza viva perduta dai corpi $M, m=\frac{MA^2}{2}+\frac{ma^2}{2}-\frac{MV^2}{2}-\frac{mv^2}{2}$.

Per la qual cosa l'elastro è premuto in ambedue le circostanze dalla medesima forza; e nel tempicello di

cagione

cagiona resistenza nel corpo M la stessa alterazione di quantità di moto e conseguentemente ancor di velocità. Perciò il corpo suddetto impiegherà par tempo in ambo gli incontri nel far transito dalla velocità primitiva A, ovvero $A \pm b$ alla media $\frac{MA \pm ma}{M+m}$, ovvero $\frac{MA \pm ma}{M+m} \pm b$, le quali differiscono per la stessa quantità $\frac{m.\overline{A \mp a}}{M+m}$; e quindi in pari tempo seguirà la comunicazione del moto colla legge dei corpi molli.

Non altrimenti passerà il corpo M in egual tempo dalla velocità media $\frac{MA \pm ma}{M+m}$, ovvero $\frac{MA \pm ma}{M+m} \pm b$ alla terminale $\frac{\overline{M-m}.A \pm 2ma}{M+m}$, ovvero $\frac{\overline{M-m}.A \pm 2ma}{M+m} \pm b$, le quali differiscono per la medesima quantità $\frac{m.\overline{A \mp a}}{M+m}$, e perciò in egual tempo si compierà in tutti e due i casi la partecipazione del moto conforme la legge dei corpi elastici.

Il perchè o si muovano i due corpi M, m sopra una nave quieta, o pure sopra una nave, che per la direzione della comunicazione del moto viaggi colla velocità $\pm b$, dimodochè rispettivamente allo spazio immobile siano forniti dalla velocità $A \pm b$, $\pm a \pm b$, nella comunicazione

del

del moto si spenderà sempre il medesimo tempo. Il moto traslato adunque non cagiona veruna alterazione nel tempo della partecipazione del moto.

XIV. Giacchè non è noto &c.

velocità prima alla media, e dalla media
all'ultima, che in tempi eguali
segue la comunicazione, o sia la reazione
della forza media, a cui si ragguaglia
la forza viva perduta, e la restituzion
della contrazione, o sia l'azione della
forza media, a cui si agguaglia la forza
viva riacquistata. Mutata la figura
dei corpi, e la rigidità delle loro fibre,
cresceranno, o caleranno bensì i detti
due tempi, ma sempre conserverannosi
eguali, la qual agguaglianza dalla
natura della forza media dipende. #

XIV. Giacchè non è nota la legge, con
cui varia la forza media fra due corpi,
che si comunicano il moto col mezzo
dell'urto, facciamo che il moto si co-
munichi mediante una corda elastica,
la legge delle forze della quale rispettiva-
mente alle distensioni è stata da
me scoperta. Prima di ogni altra
cosa metto in chiaro il meccanismo,
di cui la natura si serve: ^ Sintantochè
dal principio della comunicazione del
moto fino a quello istante, nel quale
i corpi camminano con eguale velocità,
il corpo M è più veloce del corpo m, la
la corda più si allunga dalla parte di quello,
ritardandolo; e meno si accorcia dalla parte
di questo accelerandolo; di maniera che
effettivamente si allunga, e con tale
reazione, che diventa massima, quando
i corpi si muovono con pari velocità,
diminuisca l'aggregato delle forze vive
dei corpi stessi. Ma dopo il predetto
istante sendo il corpo M meno veloce
del corpo m; la corda meno si allunga
dà

Non tralascio di avvertire,
che si danno delle altre
ricorrenze, in cui le
mentovate differenze con-
servano lo stesso valore;
ma io ho notato quella
soltanto, che mi conduceva
alla dimostrazione, del
mio ritto, che possiam far
del moto parziale.

+ Qui va posto il num.o XI.
~~[illegible]~~

Qui va il numero
XIII

^ e perchè riuscirebbe
troppo lungo il considerar
tutti i casi, suppongo
che i due corpi da principio
si muovano per la
medesima direzione,
e che sia $M > m$.

dal canto del corpo M ritardandolo, e più si accorcia dal canto del corpo m accelerandolo, laonde realmente accorciandosi, con questo ricava, che giunge al massimo, quando la corda ha ricuperata la sua naturale lunghezza, accresce la # somma delle forze vive nei due corpi, la quale raggiunge la primitiva nello ultimo istante della comunicazione del moto. In tale circostanza essendosi annullata la tensione della corda, non può ulteriormente alterare le velocità dei due corpi. #

\# Dopo che due corpi si comunichino il moto col mezzo di una corda elastica, determinare la relazione fra gli allungamenti di essa corda, e la velocità dei due corpi.

XV. Ho dimostrato al num.^ro^ (V.) che quando i due corpi M, m si comunicano colle velocità V, $v = \frac{M.\overline{A-V}}{m} \pm a$, hanno fatto perdita della forza viva

$$\frac{Mm - M^2.A^2 \mp 2MmAa + 2M^2A \pm 2Mma.V}{2m} - \frac{M^2 - Mm.V^2}{2m} \;(4).$$

La forza viva perduta dai mentovati corpi deve raggiare l'azione negativa della corda, detratta la positiva. Ora quando la corda, la cui lunghezza L, e la rigidità naturale h corrispondente allo stiramento $=0$, ha patito la distensione l, è fornita pel num.^ro^ (XV.) dello Schediasma primo contenuto nella mia Opera della Corda, ~~ovvero della corda elastica~~ della forza $\frac{1}{2}h.\frac{L+l}{L} - \frac{1}{2}\frac{hL}{L+l}$, la quale agisce per lo spazio dl, uguale al minimo

minimo effettivo allungamento della corda medesima, onde ne risulti l'azione elementare $\frac{4h}{L}\cdot\overline{Ldl + ldl}$ $-\frac{4}{2}hL\cdot\frac{dl}{L+l}$. Passo alla integrazione per avere la somma delle azioni della corda, e pongo $\frac{\frac{4h}{2}}{L}\cdot\overline{Ll+\frac{l^2}{2}} - \log.\overline{L+l}$ (4), guardando i logaritmi nella logistica della suttangente $\frac{hL}{2}$ riferiti al primo numero L. Non aggiungo costante, perchè la sommatoria si annulla, quando $l=0$.

Siamo dunque pervenuti alla equazione $\frac{h}{2L}\cdot\overline{Ll+\frac{l^2}{2}} - \log.\overline{L+l} =$

$$\frac{\overline{Mm - M^2}\cdot A^2 \mp 2MmAa + 2M^2A \pm 2Mma\cdot V}{am}$$

$-\frac{\overline{M^2 - Mm}\cdot V^2}{}$ (9). Proposizione XVI. Per costruire questa formola, pongo $\frac{h}{4L}\cdot\overline{2Ll+l^2} - \log.\overline{L+l} = p - q$ colla condizione, che sia $\frac{h}{4L}\cdot\overline{2Ll+l^2} = p$ (10.), $\log.\overline{L+l} = q$ (11). L'equazione (10.) si riduca alla seguente $L^2 + 2Ll + l^2 = \frac{4L}{h}\cdot\overline{\frac{hL}{4}+p}$. Col parametro $\frac{4L}{h}$, all'asse AS (fig. 26) descrivo la parabola $ADaX$, in cui all'assissa $AB = \frac{hL}{4}$ corrisponderà l'ordinata $BD = L$; e quindi tirata DT parallela ad AS, sarà qualunque assissa $DZ = p$, e la relativa ordinata $Za = l$.

Questa

Schadiasma XII.

Presa la linea AS come assintoto, e AB come prolungamento [illegible], segnata la logistica HDGI della suttangente h. Dal punto C tiro CG parallela ad SA, ed indi GK parallela a DB, e rispettivamente ad $Da = l$, sarà $BK = q$; laonde $KC = GC = p - q$, $Da = l$.

Ho avvertito, che alla massima variazione della forza media, o sia nel nostro caso al massimo allungamento l della corda corrisponde la massima perdita di forza viva $= \frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{2\cdot\overline{M+m}}$. Per la qual cosa avremo in tal circostanza

$$\frac{h}{4L}\cdot\overline{2Ll+l^2} - \log.\overline{L+l} = p-q = \frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{2\cdot\overline{M+m}}$$

e ne deduciamo la conseguenza, che quando l'allungamento l è pervenuto alla massima grandezza TV, esser deve $p-q = 2s = \frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{2\cdot\overline{M+m}}$.

La linea $KC = GC$ è nulla in riguardo al punto D, e [illegible] anzi va successivamente crescendo, secondochè l'ascissa BC si prende più grande. Finalmente si giungerà ad un'ascissa BS finita della qualità, che tirata l'ordinata SV alla parabola, e la linea VI parallela ad SA, che tagli la logistica HDGI nel punto I, sia $IV = 2s = \frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{2\cdot\overline{M+m}}$. Posto ciò, sarà $TV = l$ il massimo allungamento, che soffre la corda nella comunicazione del moto. Calerà poscia l'ascissa AS, e la [illegible] sarà perduta

perderanno, e gli allungamenti della corda TV, e finalmente si annulleranno nel punto B, giacchè compiuta la comunicazione del moto, la corda ha ripreso la sua naturale lunghezza e la somma delle forze viventi dei corpi si aggiugnerà alla primiera.

Non entrandoci nelle equazioni (10.), (11.) le masse M, m; e le velocità iniziali A, ±a; egli è chiaro, che da queste non dipendono le curve ADGV, HDG?, le quali rimangono sempre le stesse, purchè non si muti la lunghezza L della corda, nè la sua rigidità naturale k. Hanno bensì luogo le predette masse, e velocità nella determinazione degli allungamenti della corda, come pure nella grandezza del massimo TV, dovendo essere in tale incontro la forza viva perduta, che viene espressa dalla linea intercetta tra le due curve, cioè a dire da VI, $= \frac{Mm \cdot \overline{A \mp a}^2}{2 \cdot \overline{M+m}}$.

XVII. Poichè $p-q = \frac{Mm - M^2}{2m} \cdot A^2$ [illegible] scopriremo dopo i necessarj computi, ponendo $p-q=z$,

$$V - \frac{MA \mp ma}{M+m} = \frac{2m}{M^2+Mm} \cdot \frac{1}{2} \frac{Mm \cdot A^2 \mp 2Aa + a^2}{M+m} - z \quad (12.)$$

Tirata la KL $= \frac{Mm \cdot A^2 \mp 2Aa + a^2}{M+m}$, e normale ad essa condotta la LM $= \frac{MA \pm ma}{M+m}$, e nel punto M l'asse MO parallela alla LK. All'asse MO col

parametro

paramento $\frac{2mi}{M^2 \mp Mm}$ dalla quale la parabola concava $P Q M Q' P'$ è continuata GK sino in P, sarà $OK = CQ = m . \overline{A \mp a} : Mm$; ma $KG = CN = \frac{MA \pm ma}{M+m}$; dunque $KP = A$, $KP' = \frac{\overline{M-m} . A \pm 2ma}{M+m}$, che sono le due velocità iniziale, e finale del corpo M. Essendo $KC = ON - z$, scopriremo $KC = \frac{\frac{1}{2} Mm . A^2 \mp 2Aa + a^2}{M+m} - z$, e supposto l'equazione (12) sarà la ordinata $NQ = V - \frac{MA \mp ma}{M+m} = V - NC$, e l'ordinata $NQ' = -V + \frac{MA \pm ma}{M+m} = -V + NC$. Queste due equazioni mi somministrano due valori di

$$V = \begin{cases} CN + NQ = CQ \\ CN - NQ' = CQ' \end{cases}$$

a' quali corrisponde la stessa grandezza della corda $Fa = l$. Il valore più grande CQ compete al V quando che si giunga al massimo, ed il valore più piccolo CQ', quando si cala. Non tralasciò di notare, che i primi due valori di V relativi alla stessa allungamento Fa, cresca sopra la velocità media $KN = \frac{MA \pm ma}{M+m}$ comune ai due corpi, ed il secondo cala per la quantità NQ, conforme al numero XII. ho riscontrato giustamente doversi avvisare, qualunque sia l'indola della forza

dalla forza media. Da essa non dipendono i menzionati valori, i quali si convengono ~~gli stessi rispettivamente alla forza~~ viva perduta KL, perchè non si alterino le masse M, m, e le velocità iniziali A, ±a.

Alla massima ~~grandezza~~ ~~della~~ = TV compete una sola velocità $SR = \frac{MA \pm ma}{M+m}$. In tale incontro $ZS = Z$ si eguaglia a $KL = \frac{1}{2} \frac{Mm \cdot A^2 \mp 2Aa + a^2}{M+m}$, ed essendo nella formula (12) il coefficiente di comparazione $= 0$, ne risulta $V = \frac{MA \pm ma}{M+m}$.

La linea KL non può essere se non che positiva; ~~supponendosi~~ imperocchè è sempre positivo il quadrato $A^2 \mp 2Aa + a^2$. Non così succede della linea $LM = SR = \frac{MA \pm ma}{M+m}$ uguale alla velocità media, la quale riuscirà positiva, ~~nulla, o negativa,~~ ~~secondochè la quantità di moto MA~~ bensì sempre quando sieno tali le primitive velocità de' due corpi; ma se la velocità a del corpo m avendo una direzione contraria a quella del corpo M sarà affetta dal segno negativo, la ~~velocità media~~ grandezza ~~giacerà~~ predetta $\frac{MA - ma}{M+m}$ sarà positiva, nulla, o negativa, secondochè la quantità di moto MA supererà, o eguaglierà la ma; o sarà di essa minore.

Si conserva sempre positiva la linea $OP = m \cdot \frac{A \mp a}{M+m}$, supponendosi $A > a$, quando la velocità primitiva A, a hanno la stessa direzione. Mettendola al paragone colla $OK = \frac{MA \pm ma}{M+m}$, passerà fra loro eguaglianza, quando sia $mA \mp ma = MA \pm ma$. ~~esprime~~ Da questa formula nascono due equazioni $\frac{MA}{A-2a} = m$, $\frac{MA}{A+2a} = m$ ~~[illegible]~~ indicate ~~[illegible]~~ ne' casi, che i due corpi si incontrano per

la

la stessa; e per contrario diversa, ed è
Se la diversione è la medesima, essendo
[struck] A > ma, [struck]
e di più $m = \frac{MA}{A+a}$; che se la diversione
è contraria, basta che si verifichi l'
equazione $m = \frac{MA}{A+a}$. Nella ipotesi
di $OP = OP' = OK$; sarà la velocità
terminale del corpo M eguale a
$KP' = 0$. Determinando in numeri
degli stabiliti valori, ne risulterà che
positiva, e quella linea si cangerà
in negativa, quando si segue la
necessaria [struck]
La fig. 26 è accomodata alla ipotesi
contraria, che la velocità del corpo M
si convengano sempre positive, e egli
è facile per altro colla scorta delle
predette riflessioni l'adattare la co-
struzione agli altri casi, quando sia
positiva la velocità media, nulla, o
negativa la finale, oppure quando
la velocità media, e la finale sono
ambedue negative.

XVIII. Mi faccio ora a descrivere la curva, la cui somma $= V$, e le ordinate $= l.$

va, la cui somma $= V$, e le ordinate $= l.$
Scuata (fig. 27) $CP = A$ velocità iniziale
del corpo M, taglio $CN = \frac{MA \pm ma}{M+m}$

che dinota la velocità media del detto corpo

eguale alla linea SR della fig. 26, e
normale a CP, conduco NV eguale a
FV della mentovata fig. 23. Determino
poscia $CP' = \frac{M-m \cdot A \pm 2ma}{M+m}$ velocità
terminale della massa M. Dongo final-
mente $NQ = NQ'$ eguali alla linea
similmente denominata nella fig. 26,
e condotte le ordinate QE, $Q'E'$ eguali
alla ZE della mentovata fig. 23, i punti

P

AQ, e VQ'P appartengono alla curva, le cui ascisse CQ pareggiano le velocità del corpo M, e le ordinate QA i relativi allungamenti della corda, la cui lunghezza L, e la rigidità naturale k. Quest'altra curva è una specie di ellissi, i cui semiassi NP, NV, la quale riconosce quella, che è fornita dalla proprietà, che prendendo lungo l'asse delle ascisse dal centro N, ad ascisse uguali NQ, NQ' una positiva, e l'altra negativa, corrispondono ordinate uguali QA, Q'A'. La detta proprietà dipende dall'altra da me dimostrata, che le velocità CQ, CQ' relative agli allungamenti pari QA, Q'A' differiscono dalla velocità media CN per quantità uguali NQ, NQ'.

Supponendosi sempre la velocità iniziale A positiva, le nostre curve possono essere di ~~quattro~~ cinque specie, secondo che la velocità media, e finale sono ambe positive, il che si avvera nella fig. 27, oppure una positiva, e l'altra nulla; una positiva, e l'altra negativa; una nulla, e l'altra negativa; o per ultimo ambedue negative.

Si avranno le velocità [illegible] del corpo m tirando normale a CA la retta Pa = ±a, e continuata VN sino in c, onde sia Nc = NC, conducendo la linea aca', che interseca nel punto a' la P'a' parallela a Pa. Questa linea la Pa = ±a ~~sarà~~ rappresenterà la velocità iniziale, $Nc = \frac{MA \pm ma}{M+m}$ la media; ~~Dunque~~ e formando Pa, Nc, P'a' una serie aritmetica la velocità terminale si eguaglierà a $P'a' = \frac{2MA \pm 2ma}{M+m} \mp a$ $= \frac{2MA - \overline{M+m} \cdot \pm a}{M+m}$. Prolungando CQ

sino

sino in b, si avranno corrispondenti la velocità del corpo m ai pari allungamenti della corda Qa, Q'e, fra le quali sarà media aritmetica la velocità Nc comune ai due corpi.

Che nello stesso istante competano alle masse M, m le velocità $CQ = V$, $Qb = v = M.\frac{\overline{A-V}}{m} \pm a$ si dimostra agevolmente; imperocchè sendo $Da = Qd = \pm a$, sarà $db = M.\frac{\overline{A-V}}{m} = \frac{M}{m}.ad$; e quindi e singolarmente

esser dee $m : M :: ad : db$, e ma $PN = ad = m.\frac{\overline{A\mp a}}{M+m}$, $Nc = \frac{MA \pm ma}{M+m}$, e perciò $ac = Nc - Na = \frac{MA \pm ma}{M+m} \mp a = M.\frac{\overline{A\mp a}}{M+m}$; dunque $\pm ae : ac :: ad : db :: m : M$, e conseguentemente $db = \frac{M}{m}.ad = \frac{M.\overline{A-V}}{m}$, e per ultimo $Qb = \frac{M.\overline{A-V}}{m} \pm a$.

Posta la velocità primitiva del corpo m uguale ad a, cioè a dir positiva, sarà la velocità media comune ai due corpi $= \frac{MA+ma}{M+m}$ positiva anch'essa, ed maggiore di a. Dunque ancora riuscirà la velocità terminale del corpo predetto $= \frac{2MA - \overline{M+m}.a}{M+m}$, siccome quella che colle precedenti forma il terzo termine di una serie aritmetica. Con queste velocità si può combinare la finale velocità del corpo M positiva, nulla, o negativa.

Sia negativa la prima velocità del corpo m, e sia $MA - ma > 0$, la velocità media $\frac{MA-ma}{M+m}$ comune ai due corpi

corpi riuscirà positiva, e tale ne risulterà parimente la velocità finale del corpo m. Anche in questo caso l'ultima velocità del corpo M può essere positiva, nulla, e negativa.

Se MA = ma, la velocità media comune ai due corpi diviene = 0, ed ai corpi M, m competono le velocità finali − A, a uguali e contrarie alle primitive.

Finalmente supponendo MA − ma < 0, diviene negativa la media velocità comune ai due corpi, e l'ultima velocità del corpo m può essere negativa, nulla e positiva. La velocità terminale del corpo M in tale circostanza è necessariamente negativa.

Per soddisfare a tutti i casi notati, ci vorrebbero dieci figure. La figura 25. è adattata alla ipotesi, che le velocità iniziali, medie, e terminali dei corpi M, m abbiano la stessa direzione, e siano tutte positive.

XIX. Affine di ridurre a computo gli allungamenti f della corda, e per esempio il massimo TV (fig. 26.), effettuata la costruzione di essa figura colla maggiore esattezza, si renderà nota la misura almeno prossima di esso allungamento. Ci insegna il numero XVI., che in tal circostanza deve valere la formola

$\frac{h}{4.L}$

$$\frac{h}{4L}\cdot \overline{2Ll+l^2} - \log.\overline{L+l} = \frac{Mm.\overline{A\mp a}^2}{2.\overline{M+m}};$$

Fatta indi la riflessione, che log. $\overline{L+l}$ riferito al protonumero L nella logistica della suttangente $\frac{hL}{2}$ si agguaglia, prendendo i logaritmi dalle tavole, ad $\frac{hL}{2}$ log. $\frac{\overline{L+l}}{L}$ moltiplicato nel logaritmo iperbolico del numero 10 = 2,3025851, prenderà essa formola il seguente aspetto $\frac{h}{4L}\cdot\overline{2Ll+l^2}$ $-2,3025851\,\frac{hL}{2}$ log. $\frac{\overline{L+l}}{L}$ = $\frac{Mm.\overline{A\mp a}^2}{2.\overline{M+m}}$, ovvero l'equivalente $l - 2,3025851\,L$ log. $\frac{\overline{L+l}}{L} + \frac{l^2}{2L}$ $= \frac{Mm.\overline{A\mp a}^2}{h.\overline{M+m}}$. Cominciando da qual valore di TV, che ci somministra la costruzione, colla scorta di alquante prove giungeremo a determinare con fisica esattezza la misura della linea predetta TV.

Do un esempio di questo calcolo. Per le sperienze riferite nello Schediasma III. mi sono servito di una corda di ottone, la cui rigidità h = libre 2004$\frac{1}{2}$. Supponiamo esempigrazia h = libre 2025, $M = m$ = libre 2, $2L$ = once del piede di Parigi 36$\frac{17}{24}$ = 36,7083333$\frac{1}{3}$, e per conseguenza L = 18,3541666$\frac{2}{3}$, $A \mp a = 1$.

Faccio l = 0,09524, e

trovo

trovo $\frac{f}{L} = \frac{0,09524}{18,3541667} =$

$0,00519119 2$, ad $1 + \frac{f}{L} = \frac{L+f}{L}$

$= 1,0051911 92$. Raccolgo dalle tavole

log. 1,006 = 0,0025980

log. 1,005 = 0,0021661

loro differenza = 0,0004319

Troveremo il log. 1,00519119 2

mediante la seguente analogia

0,001 : 0,0004319 ::

0,00019119 2 : 0,00008257539 29,

al quarto termine della quale dee

aggiungersi log. 1,005 = 0,0021661,

onde si abbia log. 1,00519119 2 =

$0,00224867539 29 = \log. \frac{L+f}{L}$.

Si moltiplichi questo logaritmo per

2,302585 1 L =

2,3025851 . 18,3541667 =

42,26203068954333, e

ne risulterà $2,3025851 L . \log. \frac{L+f}{L}$

= 0,0950335 7 : ma f = 0,09524;

Dunque $f - 2,3025851 L \log. \frac{L+f}{L} =$

0,0002043.

Osservo essere $\frac{f^2}{2L} =$

$\frac{0,009070 8 2 7 8 4}{36,7083333} =$

0,000247 1; e quindi

$f - 2,3025851 L . \log. \frac{L+f}{L} + \frac{f^2}{2L} =$

0,0004 9 3 7 4.

Esprimiamo ora in frazioni

decimali il valore di $\frac{Mm . \overline{A \mp a}}{h . \overline{Mm}} =$

$\frac{1}{2025}$

$\frac{1}{2025} = 0,00049380.$

Nel caso del massimo allungamento dovendosi avverar l'equazione, facendo uso dei logaritmi della tavola $l - 2,3025851\, L \log. \frac{\overline{L+l}}{L} + \frac{l^2}{2L} = \frac{Mm.\overline{A \mp a}^2}{h.\overline{M+m}}$, ed avendo trovato la prima grandezza $= 0,00049374$ posto $l = 0,09528$, e la seconda $= 0,00049380$, le quali si agguagliano con fisica esattezza, chiaramente si scopre, che il valore di $l = 0,09528$ è veramente determinato. Ponendo $l = 0,09529$ si troverebbe la prima grandezza alquanto maggiore della seconda; e perciò, supposti esatti i logaritmi della tavola, il massimo allungamento l dovrebbe star di mezzo fra $0,09528$, e $0,09529$, e prossimamente uguagliarsi ad anca $0,095288 =$ linee $1,143420$, cioè a dire a un di presso a linee $1\frac{1}{7}$.

Ho detto supposti esatti i logaritmi della tavola; perchè potendo essi sbagliare di $\frac{1}{2}$ nell'ultima cifra, questa differenza nella presente circostanza può recare qualche notabile alterazione. Abbiamo trovato $\log. \frac{\overline{L+l}}{L} = 0,0022486753929$. Sia questo mancante di $0,000000005$, onde il vero valore sia $\log. \frac{\overline{L+l}}{L} = 0,0022487253929$. Fatta la moltiplicazione per $2,3025851\, L$, troveremo $2,3025851\, L . \log. \frac{\overline{L+l}}{L} = 0,09503568$, e quindi

l

$l - 2{,}3025851\, L \cdot \log \frac{\overline{L+l}}{L} =$ 0,00024432, ed aggiungendo $\frac{l^2}{2L} = 0{,}00024731$,

$l - 2{,}3025851\, L \cdot \log \frac{\overline{L+l}}{L} + \frac{l^2}{2L} =$ 0,00049163 notabilmente minore di $\frac{Mm \cdot \overline{A \mp a}^2}{h \cdot \overline{M+m}} = 0{,}00049380$.

Tali minuti calcoli richiederebbero le tavole dei logaritmi fornite di maggior numero di cifre.

XX. Ma lasciando da parte queste sottigliezze, molto importa, che si cavi la conseguenza, cioè che la rigidità $h =$ libre 2025, siccome assai grande, rende nell'addotto esempio l'allungamento l fisicamente minimo. Dimostreremo nel seguente numero, essere nella ipotesi di l infinitesima $l - 2{,}3025851\, L \cdot \log \frac{\overline{L+l}}{L} = \frac{l^2}{2L}$. Avremo dunque $\frac{l^2}{L} = \frac{Mm \cdot \overline{A \mp a}^2}{h \cdot \overline{M+m}}$, e perciò $l = \overline{A \mp a} \sqrt{\frac{L\, Mm}{h \cdot \overline{M+m}}}$, equazione, che si avvera con esattezza, quando $h = \infty$. Ora vediamo nell'esempio, che abbiam per le mani, quanto si accosti al vero il valore di l dedotto dalla formola $l = \overline{A \mp a} \sqrt{\frac{L\, Mm}{h \cdot \overline{M+m}}}$.

Sostituendo in cambio delle specie analitiche gli stabiliti valori, scopriremo $l = \sqrt{\frac{14{,}3541666666666}{2025}}$ $= 0{,}093204 =$ linee 1,342444. Supposti giusti i logaritmi abbiamo

determinato

determinato l = linee 1,1453420. La differenza menomissima fra le due grandezze di l consiste in linee 0,000972, cioè a dire a un di presso in $\frac{1}{1028}$ di linea, e la loro proporzione si approssima a quella di 11775 : 11786, che colla equalità si confonde fisicamente.

XXI. Fingo minimo l'allungamento l, e dimostro essere nella logaritmica della suttangente $\frac{hd}{r}$ riferita al protonumero d, $\log. \overline{d+l} = \frac{h}{r} \cdot \overline{l - \frac{l^2}{2d}}$.

Avverto, che ricorrendo alle tavole il detto logaritmo si esprime per $2,3025851 \frac{hd}{r} \log. \frac{\overline{d+l}}{d}$; dunque
$$2,3025851 \frac{hd}{r} \log. \frac{\overline{d+l}}{d} = \frac{h}{r} \cdot \overline{l - \frac{l^2}{2d}},$$
e per conseguenza
$$l - 2,3025851\, d \log. \frac{\overline{d+l}}{d} = \frac{l^2}{2d},$$
conforme ho stabilito nel numero precedente.

Torno alla logistica della suttangente $\frac{hd}{r}$ riferita al protonumero d. Sia (fig. 28.) HDGI una tale logistica, $AD = d$, $KG = d+l$, $AK = \log. \overline{d+l} = y$ (11.). Segno $KZ = dy = \frac{hd}{r} \cdot \frac{dl}{d+l}$ e tirata l'ordinata ZI, ed in oltre GC parallela a AZ, sarà $CI = dl$. Tagliata $KA = \frac{hd}{r}$, e condotta la retta AGE, toccherà questa la nostra curva nel punto G. Egli è noto,

che

che la intercetta eI fra la tangente e la curva si eguaglia alla metà della seconda differenza dell'ordinata KG. Si differenzi l'equazione $dq = \frac{hd}{2} : \frac{df}{d+f}$, considerata dq in figura di costante, e ne risulterà $\frac{ddf}{d+f} - \frac{df^2}{\overline{d+f}^2} = 0$, o sia $ddf = \frac{df^2}{d+f}$, e quindi $eI = \frac{ddf}{2}$ $= \frac{df^2}{2.\overline{d+f}} = \frac{\overline{CI}^2}{2KG}$. Per la qual cosa

$Ce = CI - \frac{\overline{CI}^2}{2KG}$: ma $KG : AK ::$

$Ce = CI - \frac{\overline{CI}^2}{2KG} : GC = KZ$; dunque

$KZ = \frac{AK}{KG} \cdot \overline{CI - \frac{\overline{CI}^2}{2KG}}$. Pongasi $AK = a$, onde divenga $KG = d$, e facendo l'infinitesima $CI = f$, sarà $KZ = \log. \overline{d+f}$. Avremo pertanto sostituendo in vece delle linee i valori analitici, $\frac{h}{2} \cdot \overline{f - \frac{f^2}{2d}} = \log. \overline{d+f}$ nella supposizione di f minimo, come si dovea dimostrare.

XXII. Giacchè generalmente la variazione dell'elasticità della corda $= \frac{h}{2} \cdot \overline{f + \frac{f^2}{2d}} - \log. \overline{d+f} = p - q = z$ per numeri XVI. e XVII., e nella supposizione di f minimo $\log. \overline{d+f}$ $= \frac{h}{2} \cdot \overline{f - \frac{f^2}{2d}}$, avremo in detta ipotesi $\frac{hf^2}{2d} = z$. A questa equazione si può agevolmente pervenire riflettendo, che pel numero XV. quando la corda

ha

ha patito la distensione l, è fornita dalla forza $\frac{h}{2}\cdot\frac{L+l}{L} - \frac{L}{L+l} = \frac{h}{2}\cdot\frac{2Ll+l^2}{L^2+Ll}$,

la quale, supposto l infinitesimo, pareggia $\frac{hl}{L}$. Il perchè in tal circostanza sarà la sua reazione = $\int\frac{hl\,dl}{L} = \frac{hl^2}{2L} = z$.

Presa per mano la formola (12.) $\overline{V - \frac{MA \mp ma}{M+m}}^2 = \frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{1}{2}\frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{M+m} - z$, sostituisco in essa in cambio di z il ritrovato valore, ed ho $\overline{V-\frac{MA\mp ma}{M+m}}^2$

$$= \frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{1}{2}\frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{M+m} - \frac{hl^2}{2L},$$ o sia

$$\frac{m^2\cdot\overline{A\mp a}^2}{\overline{M+m}^2} - \left(V - \frac{MA\mp ma}{M+m}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{m^2\cdot\overline{A\mp a}^2}{\overline{M+m}^2}\right)\left(\frac{h\cdot\overline{M+m}}{L\,Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}\right) l^2,$$ equazione

all'elisse conica, i cui semiassi

$$\frac{m\cdot\overline{A\mp a}}{M+m},\quad \overline{A\mp a}\sqrt{\frac{L\,Mm}{h\cdot\overline{M+m}}}.$$

Sia, come al numero XVIII. (Fig. 27.) $CP = A$ velocità primitiva del corpo M, $CN = \frac{MA\mp ma}{M+m}$ velocità media comune ai due corpi, e ne risulterà $NP = A - \frac{MA\mp ma}{M+m}$ $= \frac{m\cdot\overline{A\mp a}}{M+m}$, che è il primo semiasse della nostra elisse. Fatta $NP' = NP$, onde si abbia $P'P = \frac{2m\cdot\overline{A\mp a}}{M+m}$,

si

si determinerà $CD' = A - \frac{2m.\overline{A \mp a}}{M+m}$

$= \frac{\overline{M-m}.A \pm 2ma}{M+m}$ velocità terminale del corpo M. La normale NV si ponga ~~ponga~~ eguale al secondo semiasse $\overline{A \mp a}\sqrt{\frac{2LMm}{h.\overline{M+m}}}$, che pareggia il massimo allungamento della corda, e coi prodotti semiassi ND, NV descrivasi l'ellisse convessa D'Q'VQD, e ~~fatta~~ supposta CR = V, sarà RQ = l nella ipotesi di ~~lunghezza~~ l minimo; la quale si eliderà o che sia infinitesima la velocità relativa $\overline{A \mp a}$, o pure infinita la rigidità h. ~~grandissima in approssimazione~~ ~~dei corpi elastici~~.

Noto, che sendo il massimo allungamento della corda $= NV = \overline{A \mp a}\sqrt{\frac{2LMm}{h.\overline{M+m}}}$,

se si conservano costanti la rigidità, e la lunghezza della corda, e le masse dei corpi, sta esso allungamento come la velocità iniziale relativa $\overline{A \mp a}$ ~~del corpo M, la quale si eguaglia ad A-a, se i corpi si muovono per la stessa direzione, e ad A+a, se la direzione è contraria~~. Che se persistendo il resto invariabile, si muta soltanto la lunghezza L della corda, il prodotto allungamento accetta la ragione dimezzata della lunghezza L. Gli altri corollarj, che si possono dedurre, ben volentieri gli lascio alla industria di chi legge.

φ Determinare la relazione tra gli allungamenti l della corda, e gli spazj scorsi dai corpi.

XXIII. Passo alla φ descrizione della curva, le cui coordinate siano gli allungamenti l della corda, e gli spazj per esempio S percorsi dal corpo M. Se lo spazio percorso in pari tempo dal corpo m si chiami s, avremo secondochè se i corpi viaggeranno per la stessa, ~~o per~~ contraria direzione, $S \mp s = f(l)$, e per conseguenza $dS \mp ds = dl$. * Ma

$V : v = \frac{M.\overline{A-V}}{m} \pm a :: dS : ds = \frac{M.\overline{A-V} \pm ma}{mV} . dS$;

dunque

* Se i corpi camminano per contraria direzione, sarà dS, ovvero ds negativo, e perciò servirà la medesima formola.

ta qui non debbo tralasciare di avvertire, che quando i corpi sono forniti di quantità di moto eguali e contrarie, onde si abbia $MA - ma = 0$, si trova $dS = \frac{m\,df}{M+m}$, e per conseguenza $S = \frac{mf}{M+m}$. E giacchè $S - s = f$, ne risulta $-s = f - \frac{mf}{M+m} = \frac{Mf}{M+m}$. Per la qual cosa gli spazj corsi nel medesimo tempo dai corpi M, m stanno in ragione inversa delle masse M, m, o sia in ragione diretta delle primitive velocità A, a, qualunque sia la grandezza dello allungamento f.

Dunque $dS = dS \cdot \frac{M.\overline{A-V} \pm ma}{mV} =$

$\frac{\mp\overline{M+m}.V \mp MA \mp ma}{mV} \cdot dS = df$.

e perciò $dS = \frac{mV\,df}{\mp\overline{M+m}.V \mp MA \mp ma}$ (14)

+

Faccio $\frac{mV}{\mp\overline{M+m}.V \mp MA \mp ma} = \frac{y}{A}$ (15)

e da questa equazione ne raccolgo dopo i necessarj computi

$y - \frac{Am}{M+m} \cdot \overline{V \mp \frac{AM \mp am}{\mp M+m}} = \frac{Am}{\mp M+m} \cdot \frac{\mp AM \pm am}{M+m}$ (16)

Tra gli assintoti (fig. 2) CAR, BAB' descrivo le due opposte iperbole HDZ, $H'D'Z'$ corrispondenti alla formola (16), ed accadendo che ad $AS = V - \frac{AM \mp am}{M+m}$ si riferisca $SZ = y - \frac{Am}{M+m}$. Segnata $SQ = \frac{Am}{M+m}$, ne risulta porzione $QZ = y$, e condotta PQC parallela ad RAC, che tagli le iperbola $H'D'Z'$ nel punto C, e l'assintoto BB' nel punto N, sarà $NC = \frac{AM \pm am}{M+m}$, e per conseguenza $CQ = V$. Se come nel primo istante della comunicazione del moto $V = A = CP$, onde ne risulti $NP = A - \frac{AM \mp am}{M+m} = \frac{m.\overline{A \mp a}}{M+m}$, si scoprirà $PD = y = \frac{A}{A \mp a}$. Compiuta la comunicazione colle leggi dei corpi molli, quando è giunto al massimo l'allungamento della corda, ed i due corpi camminano con pari velocità, ad $V = CN = \frac{MA \pm ma}{M+m}$ corrisponde $y = \begin{cases} AB \\ AB' \end{cases} = \pm\infty$.

Calando

Calando il valore di V, y diviene negativa, e particolarmente la velocità terminale $V = \frac{\overline{M-m}\cdot A \pm 2ma}{M+m}$ corrisponde $y = p'D' = -\left(\frac{\overline{M-m}\cdot A^2 \pm 2mAa}{\overline{M+m}\cdot \overline{A\mp a}}\right)$. Avverto che la fig.a 29 è adattata alla fig. 27, in cui la velocità media, e la finale del corpo M sono amendue positive.

Ora giacchè la fig.a 27 mi dà la relazione fra V ed l, e la fig.a 29 quella fra V ed y, è in mia potestà il descrivere la curva dalle coordinate l, y, la quale sta espressa nella fig.a 30 analoga alle figure 27, e 28. All'ascissa $l = 0$ si adattano (fig. 30) le due ordinate

$$y = pD = \frac{A^2}{A\mp a}, \quad y = pD' = -\left(\frac{\overline{M-m}\cdot A^2 \pm 2mAa}{\overline{M+m}\cdot \overline{A\mp a}}\right).$$

Qualora l'allungamento $l = pN$ è giunto al massimo, e passeggia l'ordinata NV della fig. 27, abbiamo $y = \pm\infty$. Gli altri valori di l, per esempio pQ, dimandano parimente due ordinate y, una positiva QD, e l'altra negativa QD'.

Ripiglio per mano la formola (14)

$$dS = \frac{mV\,dl}{\overline{M+m}\cdot V - MA \mp ma},$$

e perchè per la formola (15) $\frac{mV}{\overline{M+m}\cdot V - MA \mp ma} = \frac{y}{A}$, ad inter mi si presenta $dS = \frac{y\,dl}{A}$, ed integrando $S = \int \frac{y\,dl}{A}$: ma (fig. 30) $\int y\,dl = pQ7D$; dunque $S = \frac{pQ7D}{A}$.

Quindi io posso determinare il valore di S rispettivamente a $pQ = l$, ed essendo vera nota la relazione fra l, ed V, ovvero v, è altresì nota quella

fra

XXIV.
* La figura 30 suppone sempre positiva la velocità del corpo M, e per conseguenza tale ancora lo spazio da esso scorso. L'aja $\frac{PNBTD}{A}$ si eguaglia allo spazio positivo passato dal primo istante della comunicazione del moto sino alla velocità media, e l'aja $\frac{NPD'T'B'}{A} = \int \frac{-y.-dl}{A}$ anch'essa positiva pareggerà lo spazio camminato ~~dalle istanze~~ dall'istante, in cui il corpo M è fornito della velocità media circa al cominciamento della comunicazione del moto. Quindi lo spazio totale scorso dal corpo M nel tempo della comunicazione del moto si scoprirà uguale nel caso presente all'aja intera $\frac{BTDD'T'B'}{A}$

fra S, e le predette velocità. Mi è convenuto non meno di paragonare lo spazio si scorso in pari tempo dal corpo m colle mentovate quantità, essendo $S - s = l$, e perciò $s = S - l = \frac{DQTD - PQ}{A}$.

* Dovendo alla velocità media positiva del corpo M corrispondere la velocità finale positiva, o nulla, o negativa, e dovendo alla velocità media nulla, o negativa rispondere la velocità terminale negativa, farebbe di uopo moltiplicare le figure 29, e 30 secondo la varia esigenza di tale corrispondenza. Farò soltanto qualche riflessione sopra il caso, in cui sia la velocità media $\frac{MA - ma}{M+m} = o$, il che suppone, che le quantità di moto nei due corpi siano uguali, e contrarie. Conoscendo che qualunque rettangolo TSA (fig. 31) nella iperbola TDH si eguagli ad $\frac{Am}{M+m} \cdot \frac{AM - am}{M+m}$; nella nostra supposizione esso rettangolo pareggerà il nulla; laonde divenendo $ST = o$, la iperbola ~~stesso~~ TDH coinciderà colli assintoto AR. Sarà dunque $y = QS + ST = QS = \frac{Am}{M+m}$, e perciò $S = \int \frac{ydl}{A} = \int \frac{mdl}{M+m} = \frac{m}{M+m} \cdot l$. Dal principio della comunicazione del moto sino alla velocità media $= o$ il corpo M scorrerà lo spazio (fig. 28) $\frac{m}{M+m} \cdot TV$. Tornerà poscia indietro, e nel fine della comunicazione si troverà in quello stesso sito, che occupava nel primo istante. In riguardo al corpo m scopriremo $s = -\frac{Ml}{M+m}$

Quindi

Questo spazio negativo crescerà sino alla misura $\frac{M}{M+m}$. TV corrispondente alla velocità media $= 0$, ed indi scemerà, e diverrà uguale a [illegible] nella [illegible] ultimo istante della comunicazione del moto.

XXV. Torno a considerare l'ipotesi di $l = \frac{1}{\infty}$, nella quale abbiamo $\frac{hl^2}{aL} = 2$, e per la formola (12.)

$$V - \frac{MA \mp ma}{M+m} = \sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{\frac{1}{2}Mm\cdot\overline{A^2 \mp 2Aa + a^2}}{M+m} - \frac{hl^2}{aL}}\,;$$

ma per la formola (14.) o sia

$$V = \frac{MA \pm ma}{M+m} + \sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{\frac{1}{2}Mm\cdot\overline{A^2 \mp 2Aa + a^2}}{M+m} - \frac{hl^2}{aL}}\,:$$

ma per la formola (14.) $dS = \frac{mVdl}{\overline{M+m}\cdot V - MA \mp ma}$; dunque $dS =$

$$\frac{\overline{MA \pm ma}\cdot m\,dl}{\overline{M+m}^2\sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{\frac{1}{2}Mm\cdot\overline{A^2 \mp 2Aa + a^2}}{M+m} - \frac{hl^2}{aL}}}$$

$$+ \frac{m\,dl}{M+m} = \frac{\overline{MA \pm ma}\cdot m\,dl}{\overline{M+m}\sqrt{m^2\cdot\overline{A \mp a}^2 - \frac{Mm-m^2}{M}\cdot\frac{hl^2}{L}}} + \frac{m\,dl}{M+m}$$

$$= \frac{m\,dl}{M+m} + \frac{MA \pm ma}{\overline{M+m}\cdot\overline{A \mp a}}\,\frac{\sqrt{\frac{LMm\cdot\overline{A\mp a}^2}{h\cdot\overline{M+m}}}\;dl}{\sqrt{\frac{LMm\cdot\overline{A\mp a}^2}{h\cdot\overline{M+m}} - l^2}}\,,$$

ed integrando, $S = \frac{ml}{M+m} +$

$\frac{MA \pm ma}{\overline{M+m}\cdot\overline{A\mp a}}$ · Arco tang. $\overline{A \mp a}\sqrt{\frac{2LMm}{h\cdot\overline{M+m}}}$ Seno l (17.

Si costruirà la nostra equazione con eleganza nella seguente maniera. Condotte a squadra le due linee (Fig. 51) $QZ = ZH = \overline{A\mp a}\sqrt{\frac{2LMm}{h\cdot\overline{M+m}}}$ uguale al

massimo

massimo allungamento, che patisca la corda nella comunicazione del moto, e tagliata $FG =$ alla parte $\frac{m}{M+m}$ della retta FH, conducasi le due diagonali QG; QH. Posta $QG = f$, sarà $QD = \frac{mf}{M+m}$. Dal centro poscia col raggio QF il semicircolo $PMFM'P'$, e continuata DQ sino in M, M', retta determinata ~~QDHL~~ $=$ Arco Rag. $\overline{A \mp a}\sqrt{\frac{Lm}{h.\overline{M+m}}}$ Seno $f = \begin{cases} PM \\ PM' \end{cases}$

Se dunque farò DK uguale alla parte $\frac{MA \pm ma}{\overline{M+m}.\overline{A \mp a}}$ dell'arco PM, ne risulterà

$$\left.\begin{matrix} QK = QD + DK \\ QK' = QD + DK' \end{matrix}\right) = \frac{mf}{M+m} + \frac{MA \pm ma}{\overline{M+m}.\overline{A \mp a}} .$$

Arco Rag. $\overline{A \mp a}\sqrt{\frac{Lm}{h.\overline{M+m}}}$ Seno $f = S'$;

e quindi a $QG = f$ corrisponderà una $\left.\begin{matrix} QK \\ QK' \end{matrix}\right) = S$ $= S$. (// a capo) L'allungamento $QG = f$ compete due volte alla corda, e quando si allunga, e quando si accorcia. Nel primo caso si determina il relativo spazio S, ponendo $DK = \frac{MA \pm ma}{\overline{M+m}.\overline{A \mp a}} . PM$, e nel secondo ponendo $DK' = \frac{MA \pm ma}{\overline{M+m}.\overline{A \mp a}}$. $PMFM'$. Quando $f = QF$ massima sua grandezza, dovrà porsi GI uguale alla porzione $\frac{MA \pm ma}{\overline{M+m}.\overline{A \mp a}}$ del quadrante PMF; e finalmente quando compiuta la comunicazione del moto, la corda ha ricuperata la sua naturale lunghezza, sarà $S = QL$ uguale alla porzione $\frac{MA \pm ma}{\overline{M+m}.\overline{A \mp a}}$ del semicircolo $PMFM'P'$; laonde avremo sempre $2GI = QL$.

Avvertendosi l'equazione

$S = S'$

$S - s = l$, o pure $S - l = s$, ed essendo $QK = S$, $QC = l$, se ne deduce $CK = s$. ~~spazio scorso nel tempo stesso dal corpo m.~~ Gli spazj QK, CK si scorrono nel tempo stesso dai corpi M, m, e ciò similmente accade in riguardo agli spazj QK', CK'. Nell'istante &c. Nell'istante del massimo allungamento $l = A \mp a \sqrt{\frac{a\,l\,Mm}{h . M+m}} = Q7 = 7H$,

~~si scoprirà ...~~

~~$\frac{m}{M+m}$ ...~~

~~ciò che si deve eguagliare ...~~

$-\left(A \mp a \sqrt{\frac{a\,l\,Mm}{h . M+m}}\right)$ si scoprirà $s = H7 = G7 - GH$. Ora giacchè 7G si agguaglia alla parte $\frac{m}{M+m}$ della linea 7H, ne risulta GH uguale alla parte $\frac{M}{M+m}$ della mentovata linea 7H. Avremo pertanto H7 uguale alla porzione $\frac{MA \pm ma}{M+m . A \mp a}$ del quadrante DM7 meno la porzione $\frac{M}{M+m}$ del raggio $C7 = 7H$. Finita che sia la comunicazione del moto, ambi i corpi avranno scorso lo spazio $QL = \frac{MA \pm ma}{M+m . A \mp a} . DM7M'D$; il quale si annullerà quando le quantità del moto dei due corpi siano eguali, e contrarie.

XXVI. La fig. 3ª è accomodata all'ipotesi, che le velocità dei due corpi siano sempre positive. Se da principio il corpo m si movesse colla velocità $+a$, la curva QK 7K'L farà angolo nel punto Q colla retta QH, la quale verrà toccata nello stesso punto dalla mentovata curva, qualora sia $a = 0$. Posto che la velocità iniziale

dal

Schediasma XII.

Del corpo m s'agguagli $a = a$, e sia $MA > ma$, la curva QKI starà dunque in parte dentro l'angolo HQG. Vediamo quando essa passi pel punto H, e lo tocchi: Dovrà trovarsi in tal circostanza $GH = GI$; e per conseguente

$$\frac{M}{M+m} \cdot QI = \frac{MA - ma}{M+m \cdot A+a} \cdot \text{Quad. Rag. } QI$$

$$= \frac{MA - ma}{M+m \cdot A+a} \cdot \frac{355}{226} \cdot QI.$$ Ridotto il conguaglio scopriremo $a = \frac{129\,MA}{226\,M + 355\,m}$; e quindi se il corpo m sarà fornito della velocità iniziale $-a = \frac{-129\,MA}{226\,M + 355\,m}$, la curva QKI verrà contenuta dentro l'angolo HQG, e toccherà la retta ZI nel punto H. Che se $-a < \frac{-129\,MA}{226\,M+355\,m}$, la curva QKI taglierà la linea QH in un punto medio fra Q, ed H, e toccherà la ZI al di sopra del punto H. Il punto del contatto sarà inferiore al punto H, e superiore al punto G, quando sia $-a > \frac{-129\,MA}{226\,M + 355\,m}$, salva la condizione di $MA > ma$.

Sia $MA = ma$, e la curva QKI coinciderà colla retta QG, e la curva IKL colla retta GQ. Gli spazi passati nello stesso tempo dai corpi M, m saranno $QD = \frac{m\ell}{M+m}$, $CD = \frac{-M\ell}{M+m}$, i quali si agguaglieranno al nulla, e nel principio, e nel fine della comunicazione del moto. Finalmente supponendo $MA < ma$, la curva QKI andrà al di sotto della linea QG. Cerco la condizione, che si richiede, acciocchè

acciocchè da essa venga toccata la linea 7 1 nel punto 7. Accadrà ciò, qualora sia G1 = G7, cioè a dire

$$\frac{MA-ma}{M+m \cdot A+a} \cdot \frac{355}{226} \cdot Q7 = \frac{m}{M+m} \cdot Q7,$$

onde dopo i necessarj computi si trovi

$$a = \overline{355M + 226m} : A \quad \frac{}{129m}$$ Se il corpo

m cominciasse colla velocità iniziale

$$-a = -\overline{355M - 226m} : A \quad \frac{}{129m};$$ la curva

QK7 sarà rinchiusa dentro l'angolo GQ7, e toccherà la retta 71 nel punto 7. Il punto del contatto poi sarà superiore, o inferiore al punto 7, secondochè la velocità negativa primordiale del corpo m si stabilirà minore, o maggiore della quantità $-\frac{355M - 226m \cdot A}{129m}$.

XXVII. Nella supposizione di $h = \frac{1}{\infty}$ si conosca agevolmente la curva delle coordinate S, V senza ricorrere alle quadrature; imperocchè (fig. 30) assegnato a Qa = l un determinato valore fra quelli, che gli possono competere, le predette figure ci insegnano le grandezze di V, e di S, che sono le coordinate della curva, che dee descriversi. Ne nascerà pertanto (fig. 32) la curva GHN, la cui assisse 71 dinoteranno gli spazj S scorsi dal corpo M, e le ordinate 1H le corrispondenti velocità V. Posto che 71 si eguagli allo spazio S relativo al massimo allungamento della corda sarà la competente velocità $V = \frac{MA \pm ma}{M+m}$, che si accomunerà in tale istante anche

al

XXIX.
* Ho dimostrato al num.° (XIII) che aggiunta, o levata la velocità b alle due primitive A, ± a, non si muta il tempo della comunicazione del moto fra i corpi M, m. Vogliasi $M \cdot \overline{A+b} + m \cdot \overline{\pm a + b} = 0$ e si troverà $b = \frac{-MA \mp ma}{M+m}$. Assegnato dunque a b un tal valore, i corpi si spiggeranno con quantità di moto eguali, e contrarie; nel qual incontro ho fatto vedere essere $S = \frac{ml}{M+m}$, $s = -\frac{Ml}{M+m}$. All'allungamento l corrisponde nella corda la forza $= \frac{1}{2}h \cdot \frac{L+l}{L} - \frac{L}{L+l}$. Sin tanto che l'allungamento l è menomo, abbiamo la detta forza $= \frac{1}{2}h \cdot \frac{2Ll + l^2}{L^2+Ll} = \frac{hl}{L}$ proporzionale all'allungamento, o sia agli spazj S, s, passati. Attribuito ad l qualunque valore, purchè infinitesimo, la comunicazione del moto segue costantemente nel tempo stesso. Ma quando l'allungamento l è finito, egli è di nuovo provare, che meno cresca la forza di quello cresca l'allungamento. Sia questo $= nl$, esprimendo n un numero maggiore

al corpo m. La fig. 32 è adattata alla circostanza, che la velocità media IH comune ai due corpi, e la velocità nominale del corpo M, cioè $2N = \frac{\overline{M-m} \cdot A \pm 2ma}{M+m}$ siano amendue positive.

Similmente si descriverà (fig. 38 / 35) la curva ghn, dalla cui ascissa fi = s sono rappresentati gli spazj passati dal corpo m, e dalle ordinate ih = v le velocità rispettive dello stesso corpo. Accomodata alla predetta curva l'ordinata $ih = \frac{AM \pm am}{M+m}$ esprimente la velocità comune ad ambo i corpi, sarà fi lo spazio relativo scorso dal corpo m. Las fig. 8 suppone positiva la velocità iniziale fg = a del corpo m; di che ricavasi, che sono altresì tali la media $ih = \frac{AM \pm am}{M+m}$, e la finale $tm = \frac{2MA - \overline{M+m} \cdot a}{M+m}$.

Trovare il tempo, in cui segue la comunicazione del moto col mezzo di una corda elastica.

XXVIII. Avendo insegnato generalmente a delineare le curve delle coordinate S, V; s, v; costruiremo agevolmente mediante l'iperbola conica fra gli assintoti le curve delle coordinate $S, \frac{1}{V}$; $s, \frac{1}{v}$, le cui aje $\int \frac{dS}{V}$, $\int \frac{ds}{v}$. Sia t il tempo, in cui si passano gli spazj corrispondenti S, s dai corpi M, m, per conforme è noto avremo $t = \int \frac{dS}{V} = \int \frac{ds}{v}$ = alle aje delle curve aventi per coordinate $S, \frac{1}{V}$; $s, \frac{1}{v}$.

*

XXX. Mi fermo sulla ipotesi di $h = \frac{1}{\infty}$, ~~che si avvicina di più al vero nelle corde di metallo~~. Ho trovato di sopra al num.^ro (XXV) $dS =$

$$\frac{\overline{MA \pm ma}\cdot m\,dl}{\overline{M+m}^2\sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{1}{2}\frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{M+m}-\frac{hl^2}{2L}}}+\frac{m\,dl}{M+m}$$

$$V=\frac{MA\pm ma}{M+m}+\sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{1}{2}\frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{M+m}-\frac{hl^2}{2L}}$$

Avremo pertanto $dt = \frac{dS}{V} =$

$$\frac{\dfrac{\overline{MA\pm ma}\cdot m\,dl}{\overline{M+m}^2\sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{1}{2}\frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{M+m}-\frac{hl^2}{2L}}}+\dfrac{m\,dl}{M+m}}{\dfrac{MA\pm ma}{M+m}+\sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{1}{2}\frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{M+m}-\frac{hl^2}{2L}}}$$

effettuando la indicata divisione, scopriremo

$$dt=\frac{m\,dl}{\overline{M+m}\sqrt{\frac{2m}{M^2+Mm}\cdot\frac{1}{2}\frac{Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{M+m}-\frac{hl^2}{2L}}}$$

la qual formola si riduce alla seguente

$$dt=\frac{1}{A\mp a}\cdot\frac{\sqrt{\frac{2L\,Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{h\cdot\overline{M+m}}}\;dl}{\sqrt{\frac{2L\,Mm\cdot\overline{A\mp a}^2}{h\cdot\overline{M+m}}-l^2}},$$

ed integrando

$$t=\frac{1}{A\mp a}\cdot\text{Arco Rag.}\sqrt{\frac{2L\,Mm}{h\cdot\overline{M+m}}}\;\overline{A\mp a}\ \text{Seno}\ l \qquad (14)$$

Descritto (Figg.ª) col raggio $QZ=\overline{A\mp a}\sqrt{\frac{2L\,Mm}{h\cdot M+m}}$ massima distensione che soffre la corda nella comunicazione del moto, secondochè la corda soffrirà maggiori distensioni. Quando dunque è minima la velocità relativa la comunicazione del moto mediante una corda elastica si effettua nel tempo più breve

Dal

maggiore dell'unità. Se la forza crescesse come le allungamento dovrebbe esser uguagliata ad $\frac{1}{2}h\cdot\frac{2nLl+nl^2}{L^2+nLl}$; e giacchè realmente si uguaglia ad $\frac{1}{2}h\cdot\frac{2nLl+n^2l^2}{L^2+nLl}$, dovrà essere

$$\frac{2nLl+n^2l^2}{L^2+nLl}<\frac{2nLl+nl^2}{L^2+Ll},$$

e dividendo per $\frac{nl}{L}$,

$$\frac{2L+nl}{L+nl}<\frac{2L+l}{L+l}.$$

Levo le divisioni e trovo

$$2L^2+2Ll+nLl+nl^2<2L^2+2nLl+Ll+nl^2,$$

e togliendo da entrambe le parti quantità uguali, $Ll<nLl$, ossia $1<n$, conseguenza vera. Quindi crescendo meno la forza di quello cresca lo allungamento totale della corda, a cui solo proporzionali gli spazj corsi dai corpi crescerà il tempo della comunicazione del

XX

*

del moto, il semicircolo $PMZM'P'$ conforme ho fatto al num.° (XXV.), e segnata $Qa = l$, e pel punto a condotta MaM' normale a QZ, sarà $\frac{PM}{A \mp a}$, ovvero $\frac{PMZM'}{A \mp a}$ il tempo corrispondente, il primo mentre la corda si allunga, ed il secondo mentre si va restituendo alla sua naturale lunghezza. Il quadrante $\frac{PMZ}{A \mp a}$ pareggia il tempo, in cui segue il massimo allungamento QZ, e si compie la comunicazione del moto colla legge dei corpi molli; e dal semicircolo $\frac{PMZM'P'}{A \mp a}$ vien dinotato il tempo, nel quale si effettua la comunicazione del moto colla legge dei corpi elastici, terminata la quale, ha ripreso la corda la sua lunghezza naturale.

XXXI. Nel citato num.° (XXV.) ho descritta la curva $QKZK'L$, che rispettivamente alle ascisse $Qa = l$ mi dà le ordinate $\left.\begin{matrix} aK \\ aK' \end{matrix}\right) = S'$, $aK' = S$; $\left.\begin{matrix} cK \\ cK' \end{matrix}\right) = s'$, $cK' = s$. Gli spazj $aK = S'$, $cK = s'$ passati dai corpi M, m sono relativi alla distensione $Qa = l$, mentre la corda si allunga; e gli spazj $aK' = S$, $cK = s$ scorsi dai detti corpi sono relativi alla distensione $Qa = l$, mentre la corda si accorcia. Quindi la prima coppia di spazj verrà scorsa nel tempo $\frac{PMZ}{A \mp a}$, e la seconda nel tempo $\frac{PMZM'}{A \mp a}$.

*

$\frac{pM \mp M'}{A \mp a}$

La fig. 3ª è accomodata al caso, in cui le velocità dei corpi M, m sono sempre positive. // Quando l'uno, o l'altro corpo, ovvero ambedue cangiano direzione, può nascere dell'equivoco nella giusta estimazione degli spazj passati. Per rimediare a schivarlo, farò qualche considerazione sopra quel caso, in cui i due corpi si spingono con quantità di moto eguale, e contraria. In tal circostanza la curva QKIK'L coincide colla retta QG, ed agli allungamenti QC = t corrisponde lo spazio $QD = \frac{mt}{M+m}$, per cui ha seguito il corpo M, e lo spazio $CD = -\frac{Mt}{M+m}$, per cui il corpo m si è mosso. (// a capo).

Nel tempo $\frac{pM}{A+a}$, i mentovati corpi avranno soltanto passati gli spazj QD, CD per direzioni contrarie. Per ben capire, come nel tempo $\frac{pM \mp M'}{A+a}$ i nostri corpi si siano mossi per gli spazj QD, CD, si tirino DO parallela a QZ, ON parallela a CH. Nel detto tempo il corpo M ha camminato per la direzione QD lo spazio ZG, ed è tornato indietro per lo spazio GO; laonde si agguaglia ad QD il residuo spazio scorso per la direzione QD. Non altrimenti nello stesso tempo $\frac{pM \mp M'}{A+a}$ il corpo M ha passato per

la

la divisione CD lo spazio HG, ed a' ritrovamento indicato per lo spazio = GNE; e perciò rimane lo spazio CD scorso per la divisione CD.

XXXII. Molti corollarj si possono dedurre dalla formola (14.) e dalla costruzione della medesima.

1. ... infinito il tempo, in cui segue la comunicazione del moto o colla legge dei corpi molli, o con quella degli elastici nella ipotesi di $h = \infty$; imperciocchè viene allora il tempo espresso o dal quadrante DMD, e dal semicircolo DMZM'D' divisi per la quantità finita $A \mp a$, i quali due archi sono amendue minimi, avendoli descritti col raggio infinitesimo $A \mp a\sqrt{\frac{a L Mm}{h.\ Mm}}$.

~~Tutta la riflessione~~, che $\frac{1}{A \mp a}$. Quadte. Rag. $A \mp a\sqrt{\frac{a L Mm}{h.\ Mm}} =$

$\sqrt{\frac{a L Mm}{h.\ Mm}}$. Quadte. Rag. 1, ...

$\frac{1}{A \mp a}$. Semic. Rag. $A \mp a\sqrt{\frac{a L Mm}{h.\ Mm}} =$

$\sqrt{\frac{a L Mm}{h.\ Mm}}$ ~~Semic. Rag.~~ 1, apertamente si scopre, che nel tempo della comunicazione del moto, o colla legge dei corpi molli, o con quella degli elastici non hanno parte alcuna nè la velocità assoluta A, ±a dei due corpi, nè la

sarà minimo, quando si supponga infinita la rigidità h, e finita la velocità relativa $A \mp a$; imperciocchè

2. che se il valore infinitesimo della velocità relativa $A \mp a$, fosse divenuto tale anche l'allungamento l, e la rigidità h nelle due i termini del finito, sarà finita la misura del predetto tempo; perchè $\frac{1}{A \mp a}$. Quad. Rag. $A \mp a\sqrt{\frac{a L Mm}{h.\ Mm}} = \sqrt{\frac{a L Mm}{h.\ Mm}}$. Quad. Rag. 1; quantità finita. $\frac{1}{A \mp a}$. Semic. Rag. $A \mp a\sqrt{\frac{a L Mm}{h.\ Mm}} = \sqrt{\frac{a L Mm}{h.\ Mm}}$. Semic. Rag. 1, sono amendue finite quantità finite.

3. Quindi apertamente si de

la velocità relativa $A \mp a$, quindi ... qualunque, purchè questa non oltrepassi i confini della quantità minima, quando la rigidità h è finita; rendendosi necessaria una tal condizione, acciocchè l'allungamento f sia infinitesimo. Per la qual cosa se persista ec. sia persistita invariata la quantità $\sqrt{\frac{2LMm}{h \cdot Mm}}$, e della velocità primitiva si mutino a piacimento i valori, purchè sia $A > a$, quando i due corpi si muovono per la medesima direzione, non si altererà punto il tempo della comunicazione del moto colla una, o colla altra legge. Il massimo allungamento della corda $= A \mp a \sqrt{\frac{LMm}{h \cdot Mm}}$ si effettuerà in tempo costante, qualunque sia la grandezza di $A \mp a$, ed in pari tempo la corda ritornerà alla primitiva sua lunghezza. [illegible]

4. Il tempo della partecipazione del moto colla una, o colla altra legge starà sempre in ragione di $\sqrt{\frac{LMm}{h \cdot Mm}}$.

5. Se le masse non si mutano, o pure si mantiene costante la quantità $\frac{Mm}{Mm}$, sarà il detto tempo in ragione diretta dimezzata della lunghezza L della corda, ed inversa parimente dimezzata della rigidità h della corda medesima; e quando la lunghezza, e la rigidità si alterassero proporzionatamente, il tempo mentovato si conserverebbe costante.

6. La corda non si cangi, o pure sia dato il valore di $\frac{L}{h}$, ed il nostro tempo accetterà la proporzione di $\sqrt{\frac{Mm}{Mm}}$. Che se fosse $\frac{Mm}{Mm}$

$\frac{Mm}{M+m} = g$ quantità data, il tempo della comunicazione del moto non varierebbe. Dalla premessa equazione ne nasce la formola $m = \frac{Mg}{M-g}$, la quale mi insegna, che M non può essere minore di g, nè ad essa quantità eguale; perchè la massa ne diverrebbe o negativa, o infinita. Assegnata ad M una grandezza maggiore di g, la sovrapposta formola determina il relativo valore di m. Sia per esempio $M = 6$, $m = 3$, onde ne risulta $\frac{Mm}{M+m} = \frac{18}{9} = 2 = g$, e stabilita $M = 4$, troveremo $m = \frac{Mg}{M-g} = \frac{8}{2} = 4$. Se dunque si farà $M = m = 4$, si effettuerà la comunicazione del moto in quel tempo stesso, in cui succedeva, quando era $M = 6$, $m = 3$, quantunque si alteri ad arbitrio, [Dunque i punti delle quantità minima qualora ne è finita] la velocità relativa $A - a$, purchè rimanga invariato il valore di $\frac{4}{2}$.

XXXIII. Quando la corda prima-ramente si allunga, indi ritorna alla pristina sua lunghezza, fa una vibrazione, la quale si può paragonare con quella di un pendolo a cicloide. Il tempo di una tal vibrazione si esprime generalmente pel semicircolo

del

del raggio = 1 moltiplicato nella radice della lunghezza. Un pendolo lungo once $36\frac{17}{24}$ del piede di Parigi fa una vibrazione per secondo; dunque instituita la analogia

$$t : \sqrt{\frac{\pi L\, Mm}{h \cdot M+m}} \cdot \text{Semic.° Rag. } 1 \;::\; 1 : \sqrt{36\tfrac{17}{24}} \cdot \text{Semic.° Rag. } 1,$$

scopriremo $t = \sqrt{\frac{\pi L\, Mm}{h \cdot M+m \cdot 36\frac{17}{24}}}$, e questo valore del tempo della comunicazione del moto fra i corpi M, m colla legge dei corpi elastici fatta col mezzo della corda, la cui lunghezza L, e la rigidità h, sarà espresso in secondi.

Il tempo della comunicazione del moto colla legge dei corpi molli si eguaglierà alla metà del precedente, onde si abbia

$$t = \sqrt{\frac{L\, Mm}{4h \cdot M+m \cdot 36\frac{17}{24}}}$$

~~Qualora le sperienze riferite nello~~ Schediasma III ~~della mia Opera Delle corde ovvero fibre elastiche~~ siano [illegible] con una corda di ottone la cui rigidità [illegible] come al num. (XIX) supponiamo [illegible] $L = 36\frac{17}{24}$, e $M = m = 2$, $h = 20\,725$, sarà il tempo della comunicazione del moto giusta il canone dei corpi elastici $= \sqrt{\frac{1}{4030}} = \frac{1}{63{,}4839\ldots} = 0{,}0157535$ di secondo,

e giusta il canone dei corpi molli $= 0{,}0078567 = \frac{1}{127{,}2\ldots}$. ~~Questi tempi~~ saranno ~~[illegible] giusti, quando la rigidità h assai grande rispettivamente all'~~

+ purché sia minima la velocità relativa $A \mp a$ rispettivamente alla rigidità $h = 20725$; saranno questi i tempi più piccoli nei quali potrà seguire mediante la corda la comunicazione del moto fra i corpi $M = m = 2$; imperocché crescendo la velocità ~~maggiore~~ relativa $A \mp a$, diverrà che ~~diverga infinita~~ non sia più minima rispetto ad h, i detti tempi acquisteranno un valore più grande.

abbreviazione quantità.

XXXIX. Una ~~corda~~ ~~perfettamente~~ rigida si leghi da un canto ad un chiodo immobile, e dall'altro al corpo m; ed una forza ~~presente~~ impertinente applicata al detto corpo abbia cagionato nella corda un menomo allungamento, e si sia formata quale forza. Lasciato in libertà il corpo, la corda colla sua azione gli imprimerà forza viva, e lo accelererà sintantochè sia ritornata alla sua naturale lunghezza: si cerca il tempo impiegato in questa comunicazione di moto.

La soluzione di questo problema non è salvochè un corollario della con precedente nostra spiegata. Il chiodo rappresenta un corpo di massa infinita M. Supponga si che i due corpi M, m sfuggendosi da prima con quantità di moto uguali, e contrarie, si siano ridotti in quiete nel momento, che si è terminata la comunicazione del moto colle leggi dei corpi molli. In tale istante la corda, col mezzo della quale si partecipa il moto, soffre l'allungamento. $A+a\sqrt{\frac{2LMm}{h\cdot M+m}} = a\sqrt{\frac{2Lm}{h}}$

a cagione che la massa m è trascurabile rispettivamente alla M, la velocità A rispettivamente alla a, e nel tempo $t=\sqrt{\frac{Lm}{4h\cdot 32\frac{12}{14}}}$ ripiglierà la sua naturale lunghezza, ed imprime al corpo m la velocità = a.

Ora

Ora se la forza applicata al corpo m ha cagionato nella corda, la cui lunghezza L, e la rigidità h, che si suppone legata al chiodo immobile, un pari allungamento $=\sqrt{\frac{2Lm}{h}}$, posto in libertà il corpo m, acquisterà la medesima velocità nel tempo stesso $=\sqrt{\frac{Lm}{4h \cdot 30\frac{12}{24}}}$, essendo le circostanze affatto simili in un caso, e nell'altro, ed egualmente immobile il chiodo, ed il corpo espresso M.

XXXV. La forza media è rinserrata nei corpi, che si comunicano il movimento. Sono essi corpi una specie di elastro, la cui lunghezza si agguaglia a quella dei corpi stessi secondo la direzione del moto. La rigidità dipende e dalla materia componente i corpi, e dalla sezione dei corpi normale alla direzione del movimento. Per la qual cosa se le sezioni variano, è parimente diversa la rigidità degli elastri. Nel tempo della comunicazione del moto colla legge dei corpi molli l'elastro si costipa, e se i corpi son molli, la costipazione non può restituirsi, e quando giunge al massimo, è terminata la comunicazione del movimento. Ma quando i corpi sono elastici, l'elastro si dilata, e ripigliando i corpi la loro ordinaria figura, è finita la comunicazione del moto colle leggi dei corpi elastici.

Se data la figura dei corpi, si rendesse nota la natura della forza media, si potrebbe determinare il

tempo

tempo della comunicazione del moto coll'una, o coll'altra legge .. La forza media fra due cilindri della stessa materia, e porzioni di basi uguali, che urtando direttamente una base coll'altra, si comunicano il moto; è analoga a quella di una corda, col mezzo della quale si parteccipa il moto. Siano L, l le lunghezze dei cilindri, b la base, ed h la rigidità della materia relativa alla base stessa; ~~riducendosi ragguagli~~ ~~ridicibile la rigidità e con~~ ~~...~~ La lunghezza dell'elastro raggia $L+l$, e dalla compressione di questo elastro nasce la forza media... la velocità relativa $= \ldots$ Supponghasi ... a seguendo le minime compressioni dei cilindri la stessa legge delle minime ~~dilatazioni~~ distensioni delle corde, si avrà per le cose dimostrate il tempo della comunicazione del moto giusta il canone dei corpi elastici: $t = \sqrt{\frac{n \cdot L+l \cdot Mm}{hb \cdot M+m \cdot 30\frac{12}{24}}}$. Si chiami g la gravità specifica della materia componente i cilindri, ed essendo $M = Lbg$, $m = lbg$, scopriremo

$$t = \sqrt{\frac{n \cdot L+l \cdot Ll\,b^2 g^2}{hb \cdot L+l \cdot bg \cdot 30\frac{12}{24}}} = \sqrt{\frac{n\,Llgb}{h \cdot 30\frac{12}{24}}}$$

Il tempo dunque della comunicazione del moto fra i nostri cilindri, la cui velocità relativa sia minima, è proporzionale alla radice del prodotto delle lunghezze dei cilindri e della gravità specifica diviso per la rigidità della materia relativa alla base $= l$. Incrociguardanti

cilindri
Ma

porzione di corpi di diversa rigidità

~~cilindri di acciajo, e di bronzo, e questa legge mi [illegible] spurianamente.~~

XXXVI. Ma se la velocità relativa sia finita, la communicazione del moto seguirà in tempo più piccolo di quello, che ora ho determinato. La dimostrazione dipende dal far vedere, che in riguardo ai cilindri più crescono la forza di quelle crescono le compressioni. Sia L la lunghezza di un cilindro, k la rigidità naturale corrispondente alla forza premente $=0$, e supposto che la forza f stia in equilibrio colla elasticità di esso corpo, quando esso ha sofferto la compressione $=x$, avremo pel num.ro XVII. della Schediasma I ~~[illegible]~~

$$dx = \frac{\overline{L-x}\cdot df}{\frac{kL}{L-x}+f}.$$

La integrazione di questa formola effettuata col metodo spiegato nel num.ro XIII. del stesso Schediasma ne dà $\frac{1}{2}k\,l\left(\frac{L-x}{L}\right)+\frac{L}{L-x}=f$.

La compressione cresca in ragione di $1:n$, esprimendo n un numero maggiore della unità. Se la forza si aumentasse nella stessa proporzione, dovrebbe essa eguagliarsi ad $\frac{1}{2}k\,l\left(\frac{nL-nx}{L}\right)+\frac{nL}{L-x}$; ma in fatti si eguaglia ad $\frac{1}{2}k\,l\left(\frac{L-nx}{L}\right)+\frac{L}{L-nx}$; dunque egli è di mestieri provare

$$-l\left(\frac{L-nx}{L}\right)+\frac{L}{L-nx} > -l\left(\frac{nL-nx}{L}\right)+\frac{nL}{L-x},$$ o sia

$$+\frac{rLnx - nx^2}{L^2 - Lnx} > +\frac{rLnx - nx^2}{L^2 - Lx},$$ e

levate le divisioni, ed anco fatta la divisione per $\frac{nx}{L}$,

$$+\frac{rL - nx}{L - nx} > +\frac{rL - nx}{L - x}.$$ Levate le divisioni, si avrà

$+rL^2 - Lnx - rLx + nx^2 >$
$+rL^2 - rLnx - Lx + nx^2$ e cancellando le quantità comuni da ambedue le parti $-Lx > -Lnx$, e dividendo per Lx, $-1 > -n$, ovvero $n > 1$, conseguenza vera.

Se le forze seguissero la ragione delle compressioni finite, non si altererebbe il tempo della comunicazione del moto: ma conciossiachè le forze divengano proporzionalmente maggiori delle compressioni, il tempo decresce, qualora si aumenta la velocità relativa $A \mp a$.

XXXVII. Ella è curiosa la proprietà, che quando si comunica il moto fra due cilindri mediante una corda elastica, il minimo tempo impiegato corrisponde alla minima velocità relativa; ed al contrario quando la comunicazione del moto si fa col mezzo dell'urto, alla minima velocità relativa vi corrisponde il massimo tempo. La ragione dipende da ciò, che tirando una corda, cresce la sua lunghezza, e cala la sua grossezza, le quali due circostanze sono amendue favorevoli a più facilmente allungarla. Ma comunicandosi un

cilindro

cilindro cala la sua lunghezza, e cresce
la sua grossezza, laonde per questi
due titoli si rende ancor più difficile
l'ulterior compressione. Quindi nelle
corde la dimensione cresce in maggior
proporzione della forza, che con essa
si equilibra, e tutto all'opposto nella compressione dei
paragonandola colla forza, che con essa equilibra
cilindri succede; e per questi due
contrarj motivi nella minima velo-
cità relativa si ritrova in
un caso il minimo tempo, e nell'
altro il massimo. Quello, che accade
nei cilindri, si ritrova ancora in
tutti gli altri corpi di diversa figura,
che urtandosi si comunicano il
movimento.

XXXVIII. Colla scorta dei cilindri, e dei paral-
lelepipedi, nei quali è nota la relazione
fra le compressioni, e le forze comprimenti;
si può determinare il ~~[illegible]~~
tempo, in cui urtandosi con minima
velocità relativa si comunicano il
moto altri corpi. Diamone un esempio.

Sia (Fig. 34) ABC un triangolo
isoscele, ed AI il suo asse. Scelto
ad arbitrio qualsivoglia punto M,
per esso si tiri DMQ parallela a BC,
e sopra la figura ADBC formo il
prisma DK, la cui altezza DI, e il quale insista perpendicolarmente sopra il piano ABC,
mi propongo di determinare la legge
fra le forze comprimenti, e le com-
pressioni per la direzione MI.
Dongo AM = k, DQ = c; DI = a, MI
= L, MN = x, e fatta NO = dx, e
tirate PNR, QOZ parallele a DQ,
mi immagino condotti per esse linee
i piani DS, QT paralleli al piano
DH. Sia h la rigidità del nostro
corpo

corpo rispettivamente al piano attaccano DH, e gravitano le rigidità dei due piani egualmente alti DH, DS seguiranno la proporzione delle loro basi DE, DG, e quelle avranno come AM : AN, avremo

$AM = k : AN = k+x :: h : \frac{h.\overline{k+x}}{k}$,

ed il quarto termine esprimerà la rigidità ~~totale~~ del piano DS, o sia delle corde DT, che si può consi=derare parallelepipedo.

Si comprimano ora per lo spazietto dx, e chiamata f la forza comprimente, avremo giusta quanto ho ~~ricavato~~ stabilito al numero XXXVI. in riguardo ai cilindri, o sia ai parallelepipedi

$$\frac{h.\overline{k+x}}{nk} . \frac{\overline{dx}}{dx-dx} - \frac{dx+dx}{dx} = f \text{, o}$$

$$\text{pure } \frac{h.\overline{k+x}}{nk} . \frac{\overline{n\,dx\,dx - dx^n}}{dx^2 - dx\,dx} = f$$

Supposta dx minima in relazione a dx si scoprirà

$\frac{h.\overline{k+x}}{nk} . \frac{n\,dx}{dx} = f$, e conseguente=mente $\frac{h\,dx}{kf} = \frac{dx}{k+x}$. Il valore di f ha da esser costante in qualunque sito, se gli strati compressi hanno da equilibrarsi fra loro; e quindi assunta f in qualità di costante, passo all'integrazione.

$\frac{hx}{kf} = \log \overline{k+x}$, prendendo i logaritmi nella logistica della sottotangente $= 1$, e riferendoli al protonumero k.

Non

Non si aggiunge costante ; perchè
posta $x = 0$, si trova come è do-
vere $\frac{hx}{kf} = \log. k = 0$. Quindi
$f = \frac{hx}{k.\log.\overline{k+x}}$, e posta $x = d$,
$f = \frac{hx}{k.\log.\overline{k+d}}$, valore della forza
atta ad equilibrarsi colla minima
compressione x .

XXXIX. Si incontrino due corpi eguali
DK , ognuno fornito della massa M
colla medesima velocità relativa
$A \mp a$, e siano collocati dentro un
vascello, il quale si muove colla velocità $\frac{A \mp a}{2}$ in una
via, che in riguardo allo spazio
immobile i corpi stessi
si colpiscano con pari velocità $= \frac{A \mp a}{2}$.
Abbiamo già veduto al numero XIII, che il moto
traslato non altera punto il tempo
della comunicazione del moto. Quindi ciascuno
dei due corpi eguali si comprimerà scorrerà con pari spazio
per la misura x ; rispetti-
vamente allo spazio immobile.

Prendo a considerare il moto
di un solo corpo, avremo la formola
$\frac{hx\,dx}{k.\log\,\overline{k+d}} = -MVdV$, ed integrando
$\frac{hx^2}{k.\log\,\overline{k+d}} = M.\overline{-V^2 + \frac{\overline{A \mp a}^2}{4}}$. Ho aggiunto
la costante $M.\frac{\overline{A \mp a}^2}{4}$; perchè
nel principio della comunicazione
del moto, quando $x = 0$, il corpo
M è fornito della velocità $V = \frac{A \mp a}{2}$.

Dalla

Schediasma XII.

Dalla sceperta formola si deduce

$$V = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{\overline{A \mp a}^2}{4} - \frac{h x^2}{M k \, Log \, \overline{k+l}}} =$$

$$\sqrt{\frac{h}{Mk \, Log \, \overline{k+l}}} \sqrt{\frac{Mk \, Log \, \overline{k+l}}{h} \cdot \frac{\overline{A \mp a}^2}{4} - x^2}$$

e conseguentemente $\sqrt{\frac{h}{Mk \, Log \, \overline{k+l}}} \; dt$

$$= \frac{dx}{\sqrt{\frac{Mk \, Log \, \overline{k+l}}{h} \cdot \frac{\overline{A \mp a}^2}{4} - x^2}} . \; Passando$$

alla integrazione mi si presenta

$\frac{h}{2} \overline{A \mp a} \cdot t =$ Arco Rag $\sqrt{\frac{Mk \, Log \, \overline{k+l}}{h} \cdot \frac{\overline{A \mp a}^2}{4}}$ ~~Mk Log k+l~~

e quindi il tempo della comunicazione del moto colla legge dei corpi molli

$t = \frac{2 \, Mk \, Log \, \overline{k+l}}{h \, \overline{A \mp a}}$. Quad^te Rag $\sqrt{\frac{Mk \, Log \, \overline{k+l}}{h} \cdot \frac{\overline{A \mp a}}{4}}$

$= \sqrt{\frac{Mk \, Log \, \overline{k+l}}{h}}$. Quad^te Rag 1 ,

e colla legge dei corpi elastici

$t = \sqrt{\frac{Mk \, Log \, \overline{k+l}}{h}}$. Semicircolo Rag. 1.

Quelli tempi si esprimeranno in secondi

$$t = \sqrt{\frac{Mk \, Log \, \overline{k+l}}{4h \cdot 30^6 \, \frac{12}{24}}}$$

$$t = \sqrt{\frac{Mk \cdot Log \, \overline{k+l}}{h \cdot 30^6 \, \frac{12}{24}}} .$$

(a capo) = Posto $k = \infty$, il nostro corpo DK diverrà un parallelepipedo, ed in tal circostanza sarà $Log \, \overline{k+l} = \frac{l}{k}$; laonde i detti tempi prenderanno il nuovo aspetto

$t = \sqrt{\frac{Ml}{4h \cdot 30^6 \, \frac{12}{24}}}$; $t = \sqrt{\frac{Ml}{h \cdot 30^6 \, \frac{12}{24}}}$, come me

si deduce dalla formola ho ritrovato al num.° (XXXV) adattandola al caso presente.

= XXXX. Il volume del corpo DK si eguaglia a $cc \cdot \frac{\overline{2kl+l}^2}{2k}$. Un parallelepipedo

sarà

sarà fornito dello stesso volume, quando non variandosi la superficie DH = cc, la sua lunghezza si eguagli a $\frac{2kl+l^2}{2k}$. Paragonando i tempi della comunicazione del moto fra i due prismi DK, e fra i due descritti parallelepipedi, fatta la riflessione, che le masse, e le rigidità hanno da un canto, e dall'altro lo stesso valore, li troveremo come $\sqrt{k \log. \frac{k+l}{k}} : \sqrt{\frac{2kl+l^2}{2k}}$, e ne dedurremo, quanto la diversità della figura diversifichi il tempo della comunicazione del moto.

Quando ho affermato dover essere minima la velocità relativa di due corpi, se anche la loro compressione ha da stare dentro i limiti della minima quantità, si dee ciò intendere rispettivamente alla rigidità h. ~~[illegible]~~, ed il bronzo per esempio è talmente rigido, che un forte colpo di martello non altera sensibilmente il suono di una campana. Quindi la velocità relativa di due corpi di bronzo, che si urtano, si può accrescere dentro certi non ristretti limiti, e nell'adoprarsi ancora sicuramente il canone stabilito del tempo della comunicazione del moto.

[illegible]

Schediasma XIII.

Determinare il massimo allungamento, che il peso di un pendolo produce nella corda, a cui è attaccato.

~~Determinare la curva descritta dalla ghianda di un pendolo, mettendo a computo la distensione della corda.~~

1. Il pendolo CB (Fig. 76) sia collocato in sito orizzontale: si dimanda qual curva BDA descriverà il punto B, mettendo a computo la distensione del filo, o corda CB. Sia giunto il pendolo nel sito CD, e poscia muova un menomo passo sino in CI. Col raggio CD descritto l'archetto DG, conduco pel punto D la perpendicolare EDH, e segno DH eguale al peso o massa del corpo B, e pel punto H delineo HI normale a CD prodotta. Finalmente pel punto I tiro la perpendicolare IK, e pel punto D l'orizzontale DE.

Pongo $CB = L$, $CD = L+l$, $ED = y$

$CE = x = \sqrt{\overline{L+l}^2 - y^2}$, $BD = s$, $GD = dz$,

e si avrà per conseguenza $GI = dl$; $LI = dy$,

$$EK = -dx = -\frac{(\overline{L+l}\cdot dl - y\,dy)}{\sqrt{\overline{L+l}^2 - y^2}}, \quad DI = ds,$$

$dz = \sqrt{ds^2 - dl^2}$. Sia inoltre M la massa, o peso del corpo B, u la sua velocità per la direzione DG, ed v la velocità assoluta per l'archetto DI della curva.

II. Eguagliandosi ad u^2 il quadrato della velocità in D per la direzione DG avremo la forza centrifuga nel detto punto $= \frac{Mu^2}{L+l}$. Il peso, o forza DH si risolve nelle due, cioè IH, che stimola il corpo per la direzione DG, e DI che lo stimola per la direzione CI. Le due seguenti analogie determinano le predette forze.

$$CD : CE :: DH : HI$$

$$L+l : x :: M : \frac{Mx}{L+l}$$

Determinare il massimo allungamento prodotto nella corda, a cui è appesa, dalla ghianda di un pendolo.

1. Questo problema è stato da me sciolto, quando tentai la costruzione della curva descritta dalla ghianda di un pendolo, mettendo a computo la distensione della corda. Ecco la strada da me ultimamente battuta.

Schediasma XIII.

$$CD : DG :: DH : DI$$
$$L+l : y :: M : \frac{My}{L+l}$$

Si supponga, che il corpo B è spinto per la direzione CI dalla forza $\frac{Mu^2 + My}{L+l}$.
Da tale forza egli è di uopo sottrar quella, con cui la corda resiste all'allungamento, la quale pel numero XV. dello Schediasma I. ~~contenuto nella mia Opera delle corde, ovvero delle ...~~ pareggia
$\frac{1}{2}h \cdot \frac{L+l}{L} - \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l}$, dinotando h la rigidità naturale della corda non stirata da peso alcuno, cioè a dire di essa corda situata nella positura orizzontale CB.
Sarà dunque la forza residua $= \frac{Mu^2 + My}{L+l}$
$- \frac{1}{2}h \cdot \frac{L+l}{L} + \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l}$, la quale può supporsi, che agisca per lo spazio $GI = dl$.
Ho detto può supporsi; perchè la forza centrifuga $\frac{Mu^2}{L+l}$ non è atta ad esercitar vera azione, che altri lo stato del corpo, ma può solo cangiare la proporzione fra le velocità per DG, GI, senza punto mutare dal suo canto la velocità assoluta per l'arco DI della curva, alla qual condizione deve il calcolo soddisfare: sopra di che veggasi la Dissertazione intorno la vera Origine, e Natura della forza centrifuga contenuta nella Raccolta di Lucca del 1763. Avremo pertanto il quadrato della velocità per la direzione $CD =$

$$\frac{2}{M}\int \frac{Mu^2 dl + My\,dl}{L+l} - \frac{1}{2}h \cdot \frac{Ldl + ldl}{L} + \frac{\frac{1}{2}hL\,dl}{L+l} \quad (1)$$

$= \frac{Mx}{L+l}$

Riapplicando la forza AH, i suoi impulsi per gli elementi dello spazietto $DG = dz$, il quadrato della velocità per la direzione DG uguaglia la quantità

$\frac{2}{M}\int \frac{Mx\,dz}{L+l}$ (2.): ma questi due quadrati debbono stare come $dl^2 : dz^2$; dunque

$$dl^2 \int \frac{Mx\,dz}{L+l} = dz^2 \int \overline{\frac{Mu^2\,dl + My\,dl}{L+l} - \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{L\,dl + l\,dl}{L} + \frac{\frac{1}{2}hL\,dl}{L+l}} \quad (3.)$$

III. Non esercitandosi altra vera azione, che la positiva della gravità del corpo B, la quale si è applicata allo spazio $aD = y$, e la negativa della tensione della corda CD, che ha ripetuto i suoi contrasti per gli spazietti dl, si avrà

$$My - \int \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{L\,dl + l\,dl}{L} - \frac{\frac{1}{2}hL\,dl}{L+l} = \frac{Mu^2}{2},$$

o sia effettuando la indicata integrazione,

$$My - \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{2Ll+l^2}{2L} + \tfrac{1}{2}hL\log.\overline{L+l} = \frac{Mu^2}{2}.$$

I logaritmi si debbono prendere nella logistica della suttangente $= 1$, riferita al protonumero $CB = L$. Non ho aggiunta costante; perchè senza tale addizione, nella posizione CB del pendolo, in riguardo a cui $y = 0$, $l = 0$, si trova rettamente $u = 0$. Ora il quadrato della velocità per DF pareggia i due quadrati della velocità per DG, GF; dunque

$$My - \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{2Ll+l^2}{2L} + \tfrac{1}{2}hL\log.\overline{L+l} = \int\frac{Mx\,dz}{L+l} + \int\overline{\frac{Mu^2\,dl + My\,dl}{L+l} - \tfrac{1}{2}h\cdot\frac{L\,dl+l\,dl}{L} + \frac{\frac{1}{2}hL\,dl}{L+l}}.$$

In cambio dell'ultima sommatoria colloco il suo valore, che si raccoglie dalla

dalla formola (3), cioè $\frac{dl^2}{dz^2}\int\frac{Mx\,dz}{L+l}$,

e moltiplicando per $\frac{dz^2}{dl^2}$ e avrò ...

$My - \frac{1}{2}h\cdot\frac{2Ll+l^2}{2L} + \frac{1}{2}hL\log.\overline{L+l} = \frac{dz^2+dl^2}{dz^2}\int\frac{Mx\,dz}{L+l}$

$= \frac{ds^2}{dz^2}\int\frac{Mx\,dz}{L+l}$, e moltiplicando per $\frac{dz^2}{ds^2}$,

$\frac{dz^2}{ds^2}\cdot\overline{My - \frac{1}{2}h\cdot\frac{2Ll+l^2}{2L} + \frac{1}{2}hL\log.\overline{L+l}} = \int\frac{Mx\,dz}{L+l}$ (4.).

III. Prendendo le differenze nella supposizione di ds costante, e dividendo poscia per dz scopro

$dz\cdot\overline{Mdy - \frac{1}{2}h\cdot\frac{Ldl+ldl}{L} + \frac{1}{2}h\frac{L\,dl}{L+l}}$

$+ 2ddz\cdot\overline{My - \frac{1}{2}h\cdot\frac{2Ll+l^2}{2L} + \frac{1}{2}hL\log.\overline{L+l}}$

$= \frac{Mx\,ds^2}{L+l}$ (5)

IV. Col mezzo della equazione $L+l = \sqrt{x^2+y^2}$, $dl = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $dz = \sqrt{ds^2-dl^2}$ $= \sqrt{dx^2+dy^2-dl^2}$ troveremo $dz = \frac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$ddz = \frac{xddy-yddx}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\overline{xdy+ydx}\cdot\overline{xdx+ydy}}{\overline{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}$.

e perchè $ds^2 = dx^2+dy^2$ è costante, avremo $-ddx = \frac{dy\,ddy}{dx}$, e per conseguenza

$ddz = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\overline{\frac{ddy}{dx} - \frac{xdy+ydx}{x^2+y^2}}$. effettuate le convenienti sostituzioni nella formola (5) mi si presenta dopo la riduzioni necessarie

h.

$$h \cdot \frac{\overline{x^2+y^2-L^2}}{2L} \cdot \overline{xdx\,dy + ydx^2}$$

$$\overline{+ My - h \cdot \frac{\overline{x^2+y^2-L^2}}{4L} + \tfrac{1}{2}hL \log \sqrt{x^2+y^2}} \cdot$$

$$\overline{2x^2 ddy + 2y^2 ddy - 2x dx dy + 2y dx^2}$$

$$= M \cdot \overline{x^2dx^2 + y^2dx^2} \quad (6) :$$

Avendo luogo in questa formola differenziale del secondo grado amendue le incognite finite, e non potendo ad essa adattarsi veruno dei tre metodi insegnati dal dottissimo Sig. Leonardo Eulero nel Tomo terzo dell'Accademia Petropolitana, non è nota la maniera di ridurla alle prime differenze, e quindi non riesce di dar compimento alla soluzione del nostro problema.

V Ci è permesso bensì di scoprire il massimo allungamento della corda corrispondente alla positura CA, quando le due linee $CD = y$, $CD = L+l$ coincidono, onde si abbia $y = L+l$. Ho determinato nel numero II. la forza, che allunga la corda $= \frac{Mu^2 + My}{L+l} - \frac{1}{2}h \cdot \frac{L+l}{L} + \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l} =$

$\frac{Mu^2 + My}{L+l} - \frac{2hLl - hl^2}{2L \cdot \overline{L+l}}$. Qualora l'allungamento sia giunto al massimo, questa forza dee pareggiare il nulla, e per conseguenza $Mu^2 = \frac{2hLl + hl^2}{2L}$ $- My$: ma in tal caso $y = L+l = CA$; dunque $Mu^2 = \frac{2hLl + hl^2}{2L} - M \cdot \overline{L+l}$.

La velocità u normale alla direzione della corda si eguaglia nella mentovata

circostanza

circostanza alla velocità assoluta v del corpo B, ed essendo generalmente

$$Mv^2 = 2My - \frac{2hLl - hl^2}{2L} + hL\log.\overline{L+l},$$

e nella ipotesi di $y = L+l$

$$Mv^2 = 2M.\overline{L+l} - \frac{2hLl - hl^2}{2L} + hL\log.\overline{L+l},$$

avremo $\frac{2hLl + hl^2}{2L} - M.\overline{L+l} =$

$2M.\overline{L+l} - \frac{2hLl - hl^2}{2L} + hL\log.\overline{L+l}$, e perciò

$$\log.\overline{L+l} = \frac{2Ll + l^2}{L^2} - \frac{3M.\overline{L+l}}{hL} \quad (7).$$

Formo due equazioni $\log.\overline{L+l} = g$ (8) $\frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.\overline{L+l}}{hL} = g$ (9) e questa ultima si riduce alla seguente

$$\overline{L+l-\frac{3LM}{2h}}^{\,2} = L^2\cdot\overline{1+\frac{9M^2}{4h^2}+g}\ \text{(segue)}.$$

VI. All' asse BI (fig. 36), col parametro L^2 descrivo la parabola BDCA, in cui all' ascissa $BI = 1 + \frac{9M^2}{4h^2} + g$ corrisponderà l' ordinata $IA = L+l - \frac{3LM}{2h}$. Continuata pertanto AI fino in C, dimodochè sia $CI = \frac{3LM}{2h}$, ne risulterà $CA = L+l$. Dal punto C si tiri CK parallela ad IB. Segnata inoltre $B7 = 1$, a cui si riferisca $7D = L$, $7G = \frac{9M^2}{4h^2}$, sarà GI, o sia $LC = g$.

Inoltre $LH = 7D = L$, ed all' assintoto KC descrivo la logaritmica MHA dalla suttangente $= B7 = 1$, che passi pel punto H, il cui pro-

[illegible]

numero $LH = L$ ... essendo $LH < LQ$, la logaritmica taglierà la parabola in un punto A, per cui si conduca l'ordinata AC. Giusta l'equazione (4) $\log. \overline{L+l} = p$, avremo $LC = p$, $CA = L+l$: ma per l'equazione (9) $\frac{2Ll + l^2}{L^2} - \frac{3M.\overline{L+l}}{hL} = q$ $LC = q$, $CA = L+l$; dunque rispettivamente al punto A $p = q$, e per conseguenza si avverà l'equazione (5) $\log. \overline{L+l} = \frac{2Ll + l^2}{L^2} - \frac{3M.\overline{L+l}}{hL}$, e $CA = L+l$ è la massima lunghezza, a cui perviene (fig. 36) il filo del pendolo CB, quando è giunto nel sito verticale CA.

VII. Se la rigidità naturale della corda, che ad essa compete prima che si cominci ad allungare, sia infinitamente piccola, diverrà infinita la linea (fig. 36) $LG = \frac{3LM}{2h}$. Lo stesso valore adeguatamente competerà anche all'ordinata GQ della parabola, la quale si agguaglia a $\sqrt{L^2 . \overline{1 + \frac{9M^2}{4h^2}}} = \frac{3LM + Lh}{2h \quad 3M} = \frac{3LM}{2h}$ e perciò $LQ = \frac{3LM}{h}$. Quindi il punto H diverrà infinitamente dal punto Q, e la logistica MHA taglierà la parabola BDQA in un punto A immensamente lontano dal punto Q; dimodochè si è infinita LQ, molto più riuscirà infinita $CA = L+l$. Dimodochè fosse $h = 0$, il filo (fig. 35) CB non farebbe alcuna resistenza, ed il corpo B discenderebbe per la linea

dal

Schediasma XIII.

dal piombo BO; nè per quanto si allungasse il filo benchè infinitamente, potrebbe mai giungere, se non per adeguazione, nella posizione CA: che se suppongasi k infinitesima, il pendolo perverrà nel sito CA, ma dopo un allungamento infinito.

VIII. Passo all'ipotesi contraria, e fingo infinita la naturale rigidità h. In tale circostanza diviene minima la linea $LG = \frac{3LM}{2h}$, ed immensamente ancora più piccola è la linea $FG = \frac{gM^2}{4h^2}$. Si adeguano dunque le due ordinate FD, GQ, ed altresì le due linee LG, HQ; laonde il punto H è infinitamente prossimo al punto Q della parabola. Si inferisce, che anche il punto A, in cui le due curve si intersecano sarà infinitamente vicino al punto Q, e però $CA = L+l$ supererà infinitamente poco $LH = L$. Ora per mezzo la formola (2) $\log . \overline{L+l} = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M \cdot \overline{L+l}}{hL}$, ~~annullato il termine incomparabile~~ $-\frac{3M \cdot \overline{L+l}}{hL}$, e fatta la riflessione che nella presente supposizione $\log . \overline{L+l} = \frac{l}{L}$, ed l^2 trascurabile rispettivamente ad l, avremo $hl = 2hl - 3M \cdot \overline{L+l}$, e conseguentemente $\frac{3ML}{h-3M} = l$, e sia per ade-

guazione

giacerà $\frac{3LM}{h} = l$; ma $Hc = \frac{3LM}{2h}$;
dunque retta HN parallela a BI,
MA = 2 Hc.

Nel citato Schediasma I. Della corde armoniche ho fatto vedere quanto sia grande la rigidità naturale h nelle corde di metallo. La rigidità naturale corrispondente al peso di due libre, che tirava una corda da me usata in alcune sperienze nel mentovato luogo riferita, ascendeva a libre $1137\frac{2}{13}$. Supponiamo pertanto, che la rigidità naturale della corda del pendolo nel sito orizzontale CB (fig. 35) si agguagli a libre 1201, e sia inoltre $M = \frac{1}{3}$, L = once 12 = linee 144, e facendo uso della formula $l = \frac{3ML}{h-3M}$ confacente alle ipotesi di h infinita, si troverà il massimo allungamento $l = \frac{144}{1201-1} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$ di linea.

IX. Volendo dedurre la misura della dilatazione l dalla formula (7.) $\log.\overline{L+l} = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.\overline{L+l}}{hL}$, egli è d'uopo ricorrere alle attenuazione. Qui fo uso dei logaritmi delle Tavole, si rifletta, che nella logistica della suttangente = 1 log. L+l riferito al protonumero L si agguaglia a $\log.\frac{L+l}{L}$ riferito al protonumero = 1. Ora la logaritmica delle Tavole ha, ~~la suttangente~~ = 2,3025851; rispettivamente il medesimo protonumero, logaritmi dalle

il log^mo^ del num^ro^ 10 = 1,0000000, e nella logaritmica della suttangente = 1 il logaritmo del predetto numero è =

a quelli di un numero dato

dallo stesso numero stanno come la sottotangente. Dividendo adunque log. $\frac{L+l}{L}$ nelle Tavole, si faccia

$$1,0000000 : 2,3025851 :: \log.\frac{L+l}{L} : \frac{2,3025851}{10000000}\log.\frac{L+l}{L}$$

ed il quarto numero pareggerà nella logistica dalla sottotangente $=1$ log $\frac{L+l}{L}$ riferito al protonumero $=1$, e conseguentemente log $\overline{L+l}$ riferito al protonumero $=L$. Quindi valendoci dei logaritmi delle Tavole avremo

$$\frac{2,3025851}{10000000}\log.\frac{L+l}{L} = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.\overline{L+l}}{hL},$$

ed effettuando la indicata divisione ... formola, che si *

*riduce alla seguente

$$\sqrt{2,3025851 \ldots L^2\log\frac{L+l}{L} + \frac{4h^2L^2+9M^2L^2}{4h^2}} + \frac{3ML}{2h} = L+l \quad (10.)$$

Si assegni ad $L+l$ un valore più prossimo al vero che sia possibile, deducendolo o dalla costruzione delineata diligentemente, e con più esattezza, o come nell'esempio addotto, quando la rigidità h è assai grande, dalla formola $l = \frac{3ML}{h-3M}$. Nel nostro esempio adunque si ponga $L+l = 144,12$. Avremo pertanto $\frac{L+l}{L} = \frac{14412}{14400} = \frac{1201}{1200}$, e $\log\frac{1201}{1200} = 0,0003620$. Sostituiti nella formola generale gli stabiliti valori, si troverà dopo i necessarj calcoli

e in vece di log. $\frac{L+l}{L}$, di L, di M, e di h.

calcoli 144, 0099 64 = L+l valore più piccolo del supposto adeguatamente uguale al supposto; Qui non c'è bisogno di passare ad altre operazioni, perchè abbiamo determinato il valore di L+l sommamente prossimo al giusto. Se altro si trovasse L+l minore del valore supposto, significa che il detto valore ipotetico è più grande del vero ~~valore~~ ~~trovando~~ supposto $\frac{L+l}{L}$ =

~~[illegible]~~, sarebbe log $\frac{L+l}{L}$ =

~~144,00000~~

~~a, [illegible] effettuati i calcoli si troverebbe [illegible]~~

e consistendo la differenza nella minima 0,000036.

X. Se la prima positura CP (fig. 37) del pendolo fosse inclinata all'orizzonte, si tirino PM, CB orizzontali, a PB verticale, e ritenute le altre denominazioni, si chiami CP = L, CM = a. Nel sito CP il filo sarà stirato dalla forza $\frac{aM}{L}$, e perciò a questa forza tendente dovrà corrispondere la rigidità naturale = h; giunto il pendolo in CD, sarà la corda stirata dalla forza $\frac{Mu^2+My}{L+l}$, a cui pel numero XV dello Schediasma I. ~~[illegible] Delle Corde,~~ ~~[illegible]~~ sarà contratto la forza $\frac{1}{2}h + \frac{aM}{L} \cdot \frac{L+l}{L} - \frac{1}{2}h \cdot \frac{L}{L+l}$.

Avremo dunque la forza rendita

$$= \frac{Mu^2+My}{L+l} - \frac{1}{2}h - \frac{aM}{L} \cdot \frac{L+l}{L} + \frac{1}{2}h \cdot \frac{L}{L+l};$$

Il corpo B nel punto D verrà animato dalla forza viva $Mv^2 =$
$$My - Ma - \int \frac{\frac{1}{2}h + aM}{L} \cdot \frac{Ldl + ldl}{L} + \frac{\frac{1}{2}hLdl}{L+l}$$
$$= My - Ma - \frac{\frac{1}{2}h - aM}{L} \cdot \frac{2Ll + l^2}{2L} + \frac{1}{2}hL \log \overline{L+l},$$
prendendo i logaritmi nella logistica della suttangente $= 1$, riferita al posto numero $CD = L$. Ora nel punto A $u = v$, $y = L+l$, e la forza allungante la corda esser dee $= 0$; dunque sarà
$$\frac{2M \cdot \overline{L+l} - 2Ma - \frac{h - 2aM}{L} \cdot \frac{2Ll + l^2}{2L} + hL \log \overline{L+l}}{L+l}$$
$$+ 4M - \frac{\frac{1}{2}h - aM}{L} \cdot \frac{L+l}{L} + \frac{\frac{1}{2}hL}{L+l} = 0 \ (11)$$
la qual formula si riduce alla seguente

~~$\sqrt{2hL^2 \log \overline{L+l} + L^2 + \frac{9a^2M^2L^2}{4h^2}}$~~

$$\sqrt{\frac{hL^3 \log \overline{L+l} + hL^3 - aML^2}{hL + 2aM} + \frac{\frac{9}{4}M^2L^4}{\overline{hL+2aM}^2}} + \frac{\frac{3}{2}ML^2}{hL+2aM}$$
$= L+l$ (12), e volendo far uso dei logaritmi delle tavole
$$\sqrt{\frac{2{,}3025851 \cdot hL^3 \log \frac{L+l}{L} + hL^3 - aML^2}{hL+2aM} + \frac{\frac{9}{4}M^2L^4}{\overline{hL+2aM}^2}}$$
$$+ \frac{\frac{3}{2}ML^2}{hL+2aM} = L+l \ (13).$$
Col mezzo di questa equazione si troverà la massima lunghezza $L+l = CA$ della corda, ponendo in opera il metodo delle approssimazioni.

XI.mo La formola (11.) si può costruire collo stesso artifizio usato rispettivamente alla formola (7). La mentovata formola (11.) si trasforma così log. $\overline{L+l}$

$$= \frac{hL+2aM}{hL^3}\cdot\overline{2Ll+l^2} - \frac{3M\cdot\overline{L+l}}{hL} + \frac{3aM}{hL}.$$

Faccio log. $\overline{L+l} = p$ (14)

$$\frac{hL+2aM}{hL^3}\cdot\overline{2Ll+l^2} - \frac{3M\cdot\overline{L+l}+3Ma}{hL} = q \quad (15.)$$

L'ultima equazione dopo varie operazioni prende il sottoposto aspetto

$$\overline{L+l-\tfrac{3}{2}ML^2}^{\,2} = \frac{hL^3}{hL+2aM}\cdot\overline{\frac{9M^2L}{4h\cdot\overline{hL+2aM}} - \frac{aM}{hL}+1+q},$$

e si costruisce così nella maniera seguente

All'asse BI (Fig. 35), col parametro $\frac{hL^3}{hL+2aM}$ delineo la parabola BDaA, la cui assisse BI = $\frac{9M^2L}{4h\cdot\overline{hL+2aM}} - \frac{aM}{hL}+1+q$, e le ordinate IA = $L+l-\frac{3}{2}ML^2$. Aggiunta all'ordinata IA la linea CI = $\frac{3}{2}ML^2$, ne risulta CA = $L+l$. Taglio poscia BG = $\frac{9M^2L}{4h\cdot\overline{hL+2aM}} - \frac{aM}{hL}+1$; e resta GI = LC = q.

Segnata LH = L, che prendo in figura di protonumero, all'assintoto CK descrivo la logaritmica AHM della suttangente = 1, la cui coordinata LC = p, CA = $L+l$. Si intersechino la parabola, e la logistica nel punto A; e giacchè rispettivamente ad esso punto q, e p hanno lo stesso valore, ed altresì

e'

è comune l'ordinata $CA = L+l$, avremo $\log.\overline{L+l} = \frac{hL+2aM}{hL^3}\cdot\overline{2Ll+l^2} - \frac{3M\cdot\overline{L+l}+3aM}{hL}$, conforme richiede l'equazione (11), e perciò CA sarà la massima lunghezza, a cui perviene la corda, mentre il pendolo oscilla.

XII. L'allungamento l può esser minimo, o perchè sia infinita la naturale rigidità h della corda, relativa alla forza stirante $\frac{aM}{L}$, o perchè sia infinitesimo l'angolo (fig. 34) ACP. In ambo le circostanze si avrà $\log.\overline{L+l} = \frac{l}{L}$, e riuscirà trascurabile la quantità rispettivamente nulla l^2. Scopriremo pertanto, ridotto il computo, $\frac{3ML\cdot\overline{L-a}}{hL+4aM-3ML} = l$ (161).

Sia infinitamente grande la rigidità h, e cancellati nel denominatore i termini minimi in riguardo ad hL; avremo $\frac{3M\cdot\overline{L-a}}{h} = l$.

Se stando dentro i limiti del finito la rigidità h, fosse (fig. 34) infinitesimo l'angolo ACP, e per conseguenza minima la tangente $MP = b$, descritto col raggio $CM = a$ l'arco MQ, onde ne risulti $QP = L-a$, si avrebbe $L^2-a^2 = b^2$, o sia $L-a = \frac{b^2}{L+a}$; e giacchè adequatamente $L+a = 2L$, ne risulterebbe $L-a = \frac{b^2}{2L}$. Nel numeratore della formola (161.) si ponga in cambio di $L-a$ il suo valore $\frac{b^2}{2L}$, e nel denominatore si collochi $4ML$ in vece di $4aM$, e ci si presenterà $\frac{3Mb^2}{2hL+2ML} = l$.

Appendice allo Schediasma I.

Soluzione della difficoltà proposta dal dottissimo Padre D. Girolamo Saladini intorno ad una proposizione contenuta nell' Opera *Della corda, o fibra elastica* del Sig.r Co. Giordano Riccati, Schediasma I. num.o XX. cioè che un peso minore della rigidità naturale di una corda la rompa.

~~Soluzione della difficoltà proposta dal Dott.mo P. D. Girolamo Saladini intorno ad una proposizione contenuta nella mia Opera Delle corde, o fibre elastiche, Schediasma I. num.vo XX. cioè che un peso minore della rigidità naturale di una corda la rompe.~~

Appendice allo Schediasma I.

I. Al numero XX. dello Schediasma I. asserisco fondato su

~~Nella mia Opera Delle corde, o fibre elastiche~~ Al numero XX. dello Schediasma I. asserisco fondato sulle mie teoriche, e sugli esperimenti di M. Sauveur, che in una corda sono due cose diverse la rigidità, che ripugna alle distrazioni e la tenacità, che ne impedisce il rompimento sino ad un certo segno. La corda da me usata nelle sperienze si sarebbe rotta applicandole il peso di libre 12 e grani 13 e $\frac{12}{13}$, e nell'atto di rompersi sarebbe stata fornita della rigidità naturale equivalente a libre 1124 $\frac{1}{2}$ o in di presso, grandezza incomparabilmente maggiore della tenacità di essa corda alquanto più piccola del peso di libre 12 e grani 13 e $\frac{12}{13}$, che li ha superata...

Ora il chiarissimo P. D. Girolamo Saladini la discorre accortamente così. La rigidità naturale non può esser altro, che una specie di resistenza la quale ad esser equilibrata esige, che le si applichi un determinato peso, prima che la corda ad allungarsi incominci: ma egli è impossibile, che si rompa, se allungata non sia; dunque perchè si rompa, converrà aggiungere un altro peso a quello, che equilibra la rigidità naturale. E come dunque può stare, che il peso rompente la corda sia minore dalla

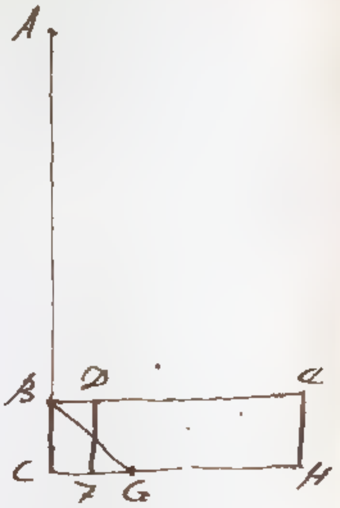
dalla rigidità naturale, se deve essere uguale a quella, che equilibra la detta rigidità colla aggiunta di un altro?

II. La difficoltà è degna di chi la propone, e merita d'essere maturamente discussa. Per iscoprirne lo scioglimento, egli è di uopo considerare, che la corda non irritata conserva la sua naturale lunghezza, e ad accorciarsi, o ad allungarsi egualmente ripugna. Si cavi adunque la conseguenza, che la rigidità naturale ha da essere equilibrata da un'altra forza, e che un tale bilanciamento impedisce, che la corda muti figura, quando non vi sia una forza estrinseca, che la frastorni. Ora venendo gli equilibrj turbati da ogni forza quantunque piccola; ne segue che attaccato qualsivoglia peso alla corda, dee rompere l'equilibrio, ed allungare la corda stessa. Che se qualcuno opponesse, che in si fatta guisa la rigidità naturale si pone, e si toglie nel tempo medesimo, ed è come se non vi fosse; risponderei, che siccome al crescere della rigidità artificiale, quantunque bilanciata dal peso P, cala la distensione prodotta dal peso aggiunto dp; così quanto è più grande la rigidità naturale, benchè equilibrata, tanto riesce più piccolo l'allungamento operato dal peso dp; e quindi non si avvera, che sia lo stesso come, se non esistesse la naturale rigidità equilibrata.

III. Nè si può sostenere, che la rigidità

naturale

naturale sia soltanto una forza passiva,
nella quale ipotesi, per dir il vero, la corda
non si allungherebbe, se non applicandole
un peso maggiore di essa rigidità. (fig. 38)
Imperciocchè abbiasi la corda AB, a cui
si appenda il peso P, che formi equili=
brio colla rigidità naturale, e giusto
la supposizione, che si combatte, non pro=
duca distensione veruna. Si aggiunga
poscia il peso dp, il quale allungando
la corda, discenda, congiuntamente col peso P accelerandosi, e ritar=
dandosi per lo spazio minimo BC, e
pervenga alla quiete nel punto C.
Normale ad AC conduco la linea BE
uguale al peso P, o sia alla rigidità na=
turale, e tagliata BD = dp, compio
i due rettangoli BH, BF. Segno poi
CG = 2BD = 2dp, e tiro la diago=
nale BG. Essendo minimo il peso
aggiunto dp, le ordinate del triango=
lo BCG dinotano le artificiali rigidità
crescenti della corda, secondochè si va
maggiormente stendendo, e l'aja dello
stesso triangolo pareggia la tensione
delle predette rigidità: ma per la cos=
truzione il mentovato triangolo si
agguaglia al rettangolo BF, che esprime
l'azione del peso BD = dp, e l'azione
BH del peso BE = P è compensata
da una pari tensione della rigidità
naturale; dunque uguagliandosi l'
azione totale alla totale tensione, i
pesi P+dp si sono ridotti in quiete nel
sito C, dove la rigidità artificiale della
corda è doppia del peso aggiunto dp.
Ora io dico, che posta la rigidità naturale
una forza soltanto passiva, e considerando
come forza passiva e attiva la rigidità artificiale,
i pesi



38. 38'.

i pesi P+dp si fermerebbero nel sito C nè seguirebbe reciprocazione, dimodochè la corda sarebbe molle, e non elastica, come per altro supponesi. E veglia il vero i pesi P+dp sono spinti allo ingiù dalla forza P+dp infinitamente maggiore di quella adp uguale alla rigidità artificiale, che li tira alli insù, e per conseguenza non è loro permesso di ascendere.

IV. Non così succede supponendo la rigidità naturale una forza attiva equilibrata da un'altra forza esistente nella medesima corda. In tale ipotesi non c'è bisogno del peso P, che la equilibri, laonde applicato il solo peso dp, e giunto esso nel punto C allo stato di quiete, sarà tirato abbasso dalla forza dp, e spinto in alto dalla forza doppia 2dp, e perciò salirà sino al punto B, indi tornerà a discendere, ed una tale vicenda continuerebbe all'infinito, se non vi fossero resistenze. E poichè trovansi effettivamente le notate oscillazioni, e reciprocazioni, resta ad evidenza provato, che la rigidità naturale è una forza attiva ed equilibrata, e si conferma quello che ho detto sul bel principio, che intatta la corda non tirata conserva la sua figura, inquantochè la rigidità naturale è una forza attiva, che da un'altra forza rinserrata nella corda stessa è tenuta in bilanciamento. Le due rigidità naturale, ed artificiale appartengono alla stessa specie di forze, ed anzi la seconda non è che un accrescimento della prima. La naturale sta in equilibrio con una forza appiattata nella corda, l'artificiale col peso o forza tendente. Nasce principalmente la rigidità naturale dalla contrazione

cagionata

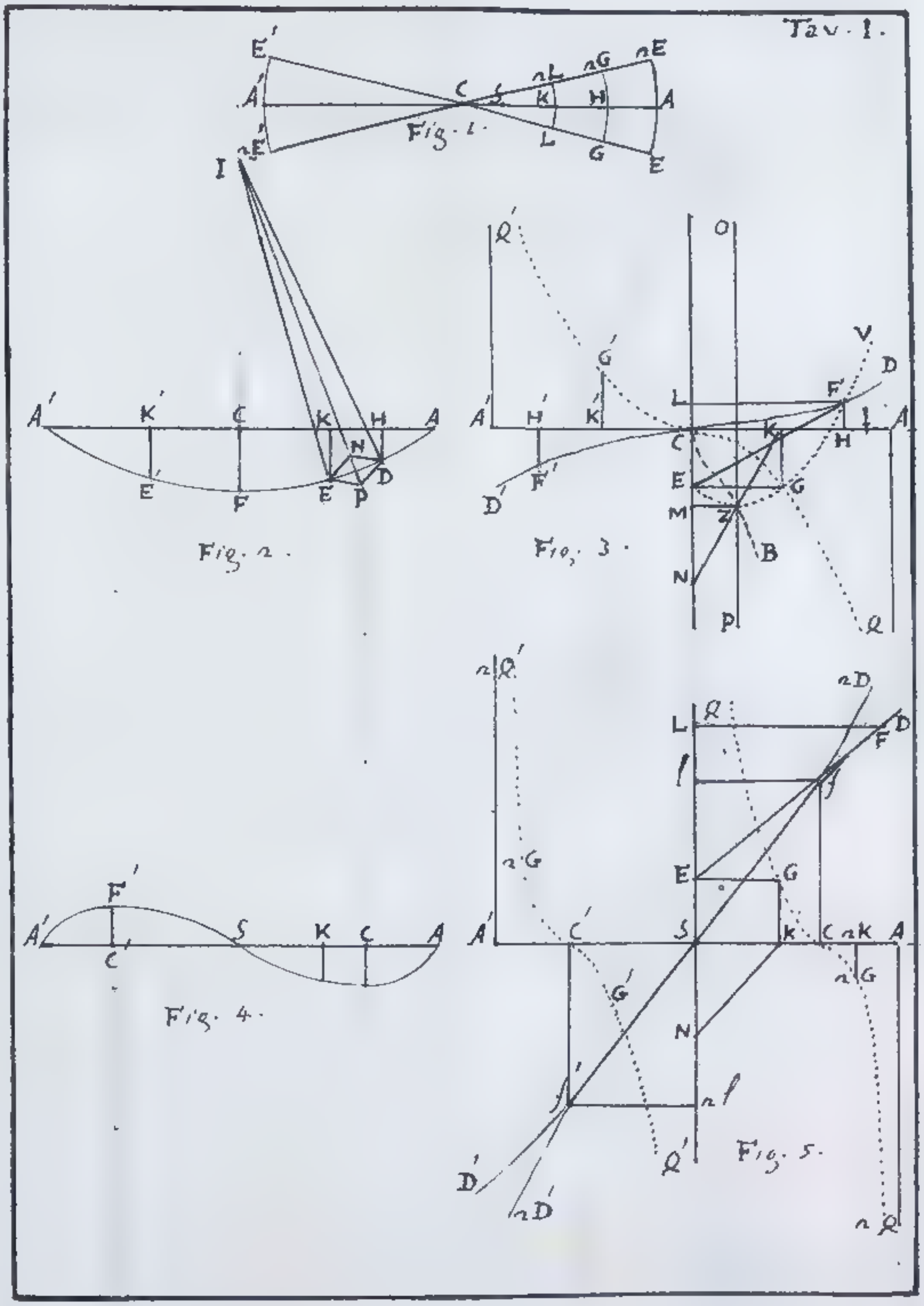
cagionata dal passar che fa la corda innume=
rabili volte con sommo sforzo per trafila
sempre più ristretta: e la forza, che li equi=
libra, trae la sua origine dallo intralciamento
delle particelle metalliche, che impediscono
alla corda il dilatarsi, dopochè è uscita dalla
trafila. Gittata una corda nel fuoco, la vio=
lenza di questo elemento la rarefà, la fa
perdere la più risentita rigidità, e con
essa la sonorità per lo meno in gran
parte. Concludasi, che rendendo una
corda allungata da qualsivoglia benchè
minimo peso; si schiva l'assurdo, che
un peso minore della rigidità naturale
la rompa senza allungarla.

V. Finisco con alcune riflessioni impor=
tanti intorno alla tenacità delle corde di
metallo. Quella tenacità, che unicamente
si manifesta negli esperimenti, e che col
mezzo della tensione si vince, è non solo
di gran lunga minore della totale rigidità,
ma ancora della rigidità naturale. Al
contrario la predetta tenacità è sempre
più grande della rigidità artificiale, quando
la corda si conserva intera; ed allora
soltanto queste due forze si eguagliano,
quando la corda è infinitamente prossima
a rompersi. Ma una tale tenacità si egua=
glia poi alla totale tenacità della corda?
Io penso certamente che no. Bisogna
aggiungervi una porzione molto maggio=
re uguale alla rigidità naturale corrispon=
dente al peso, che accresciuto di un minimo
rompe la corda; onde l'intera tenacità
pareggi la somma della rigidità naturale,
ed artificiale, di cui è fornita la corda nell'
atto di rompersi. La tenacità uguale ed
identica alla rigidità naturale è tenuta

in

in equilibrio dalle tante volte nominate forze esistenti nella corda; e perciò equilibrate col mezzo della tensione le rimanenti tenacità, basta l'accrescimento di un peso minimo per frangere la corda. Sintantochè la corda non è vicina a spezzarsi, l'intera tenacità è maggiore della intera rigidità; e solo quando la rottura è imminente, le mentovate forze giungono all'uguaglianza.

Credo, se pure non prendo errore, che sia quanto basta spianata la proposta difficoltà; ed io ringrazio divotamente lo stimatissimo Padre D. Girolamo Saladini, che mi abbia dato occasione di discutere un punto, che veramente meritava di essere dilucidato.



Tav. I.

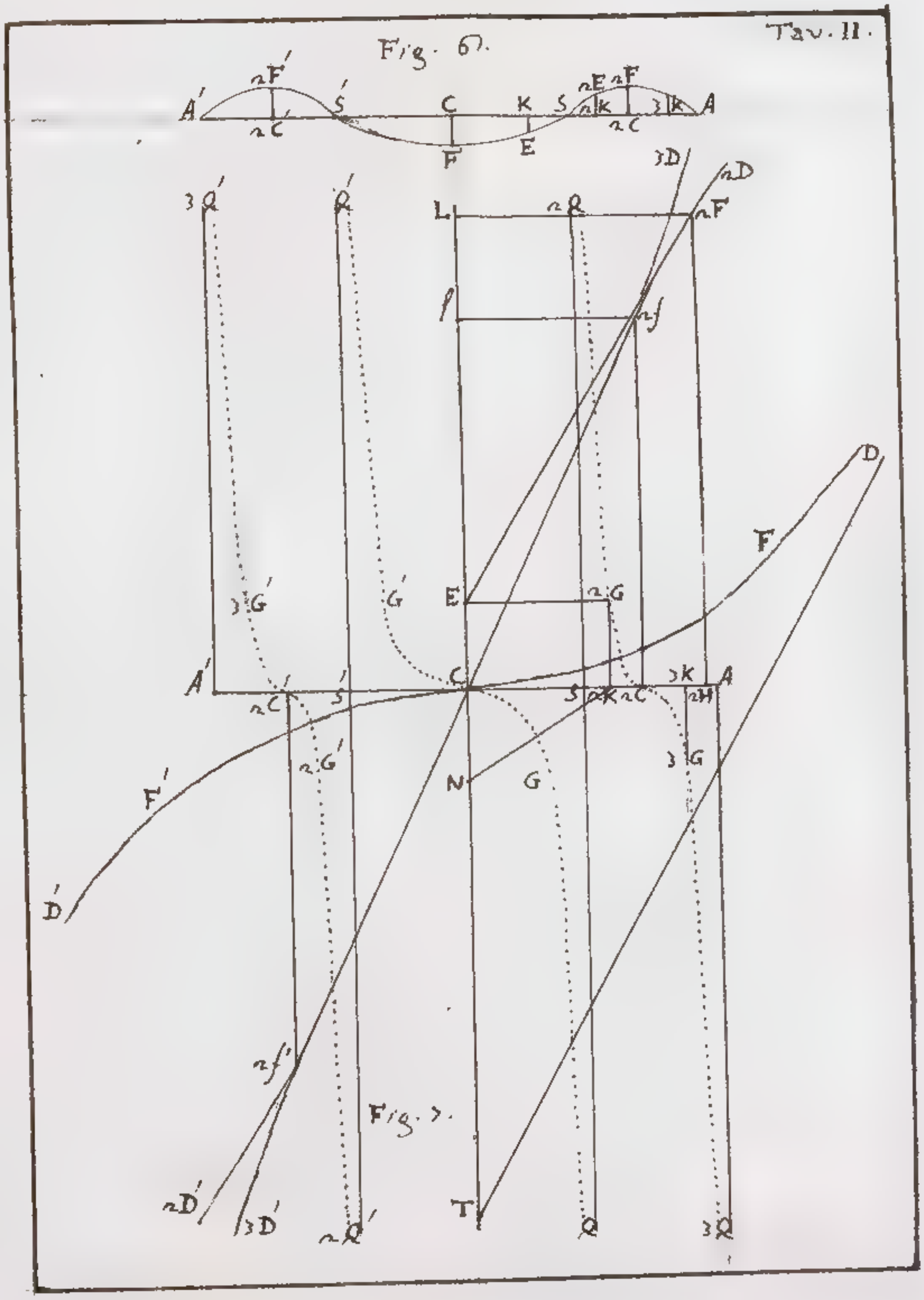
Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.


Tav. II.
Fig. 6.
Fig. 7.

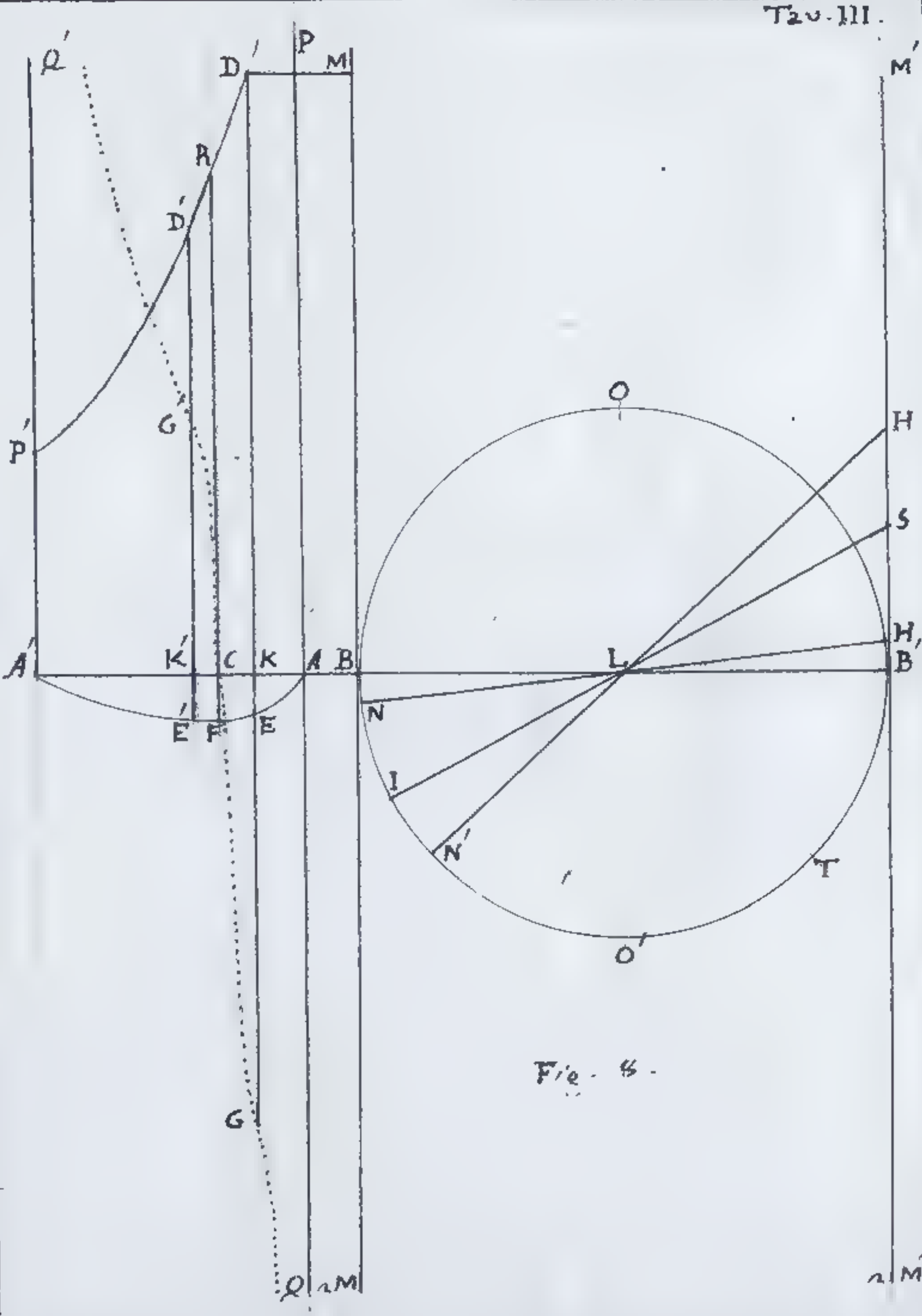


Fig. 4.

x
*

Tav. IV.

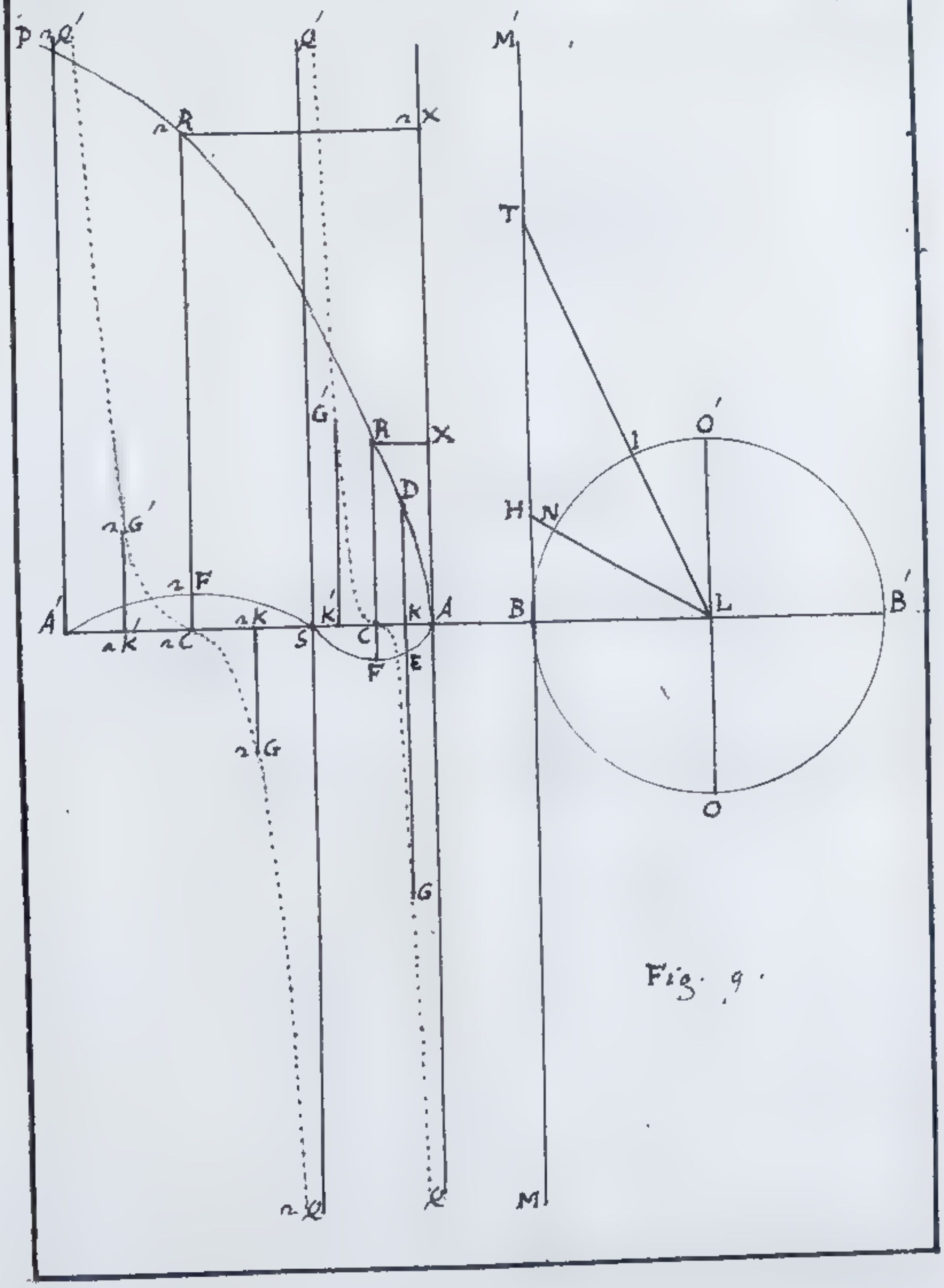


Fig. 9.

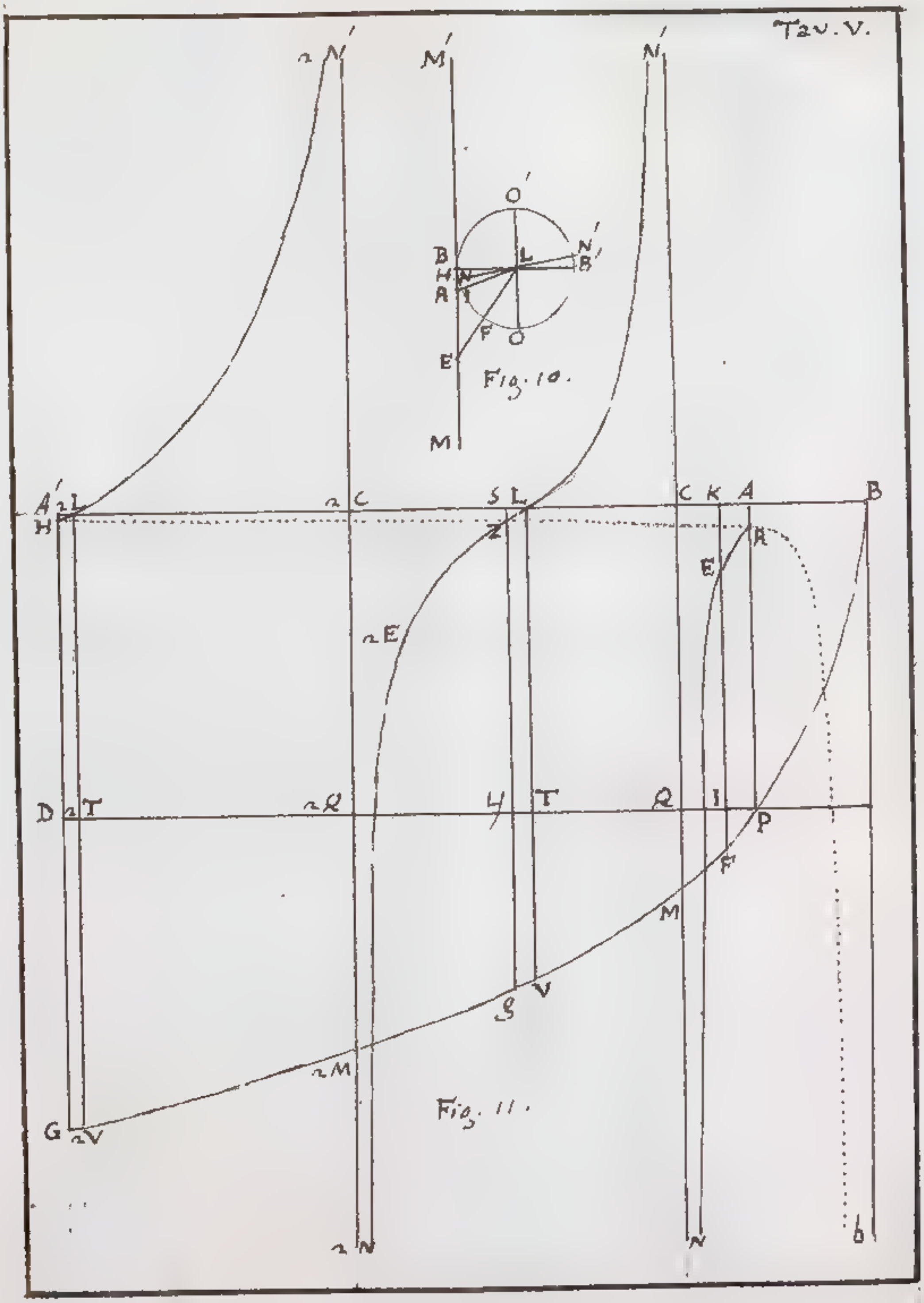


Fig. 10.

Fig. 11.

Tav. VI.

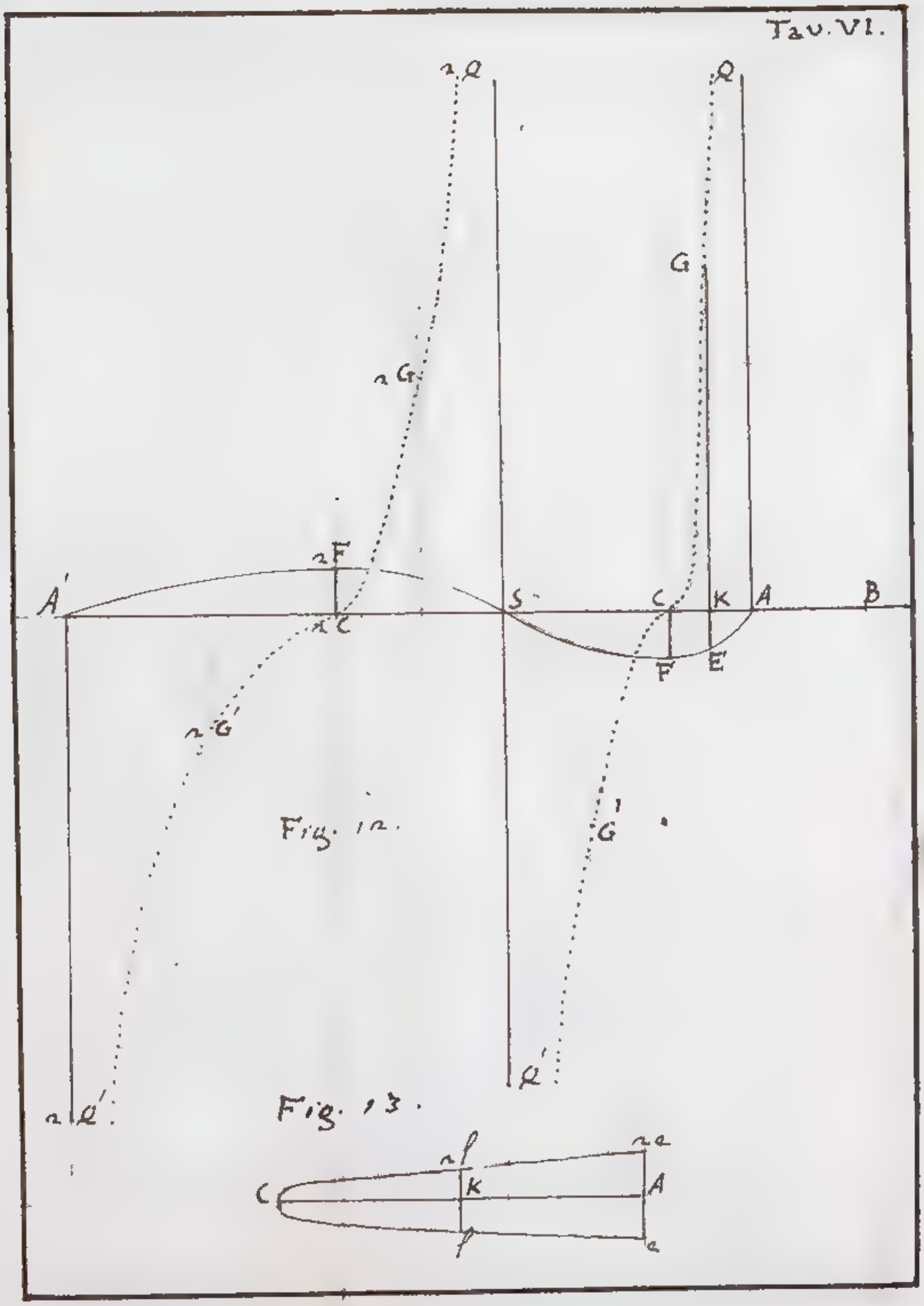
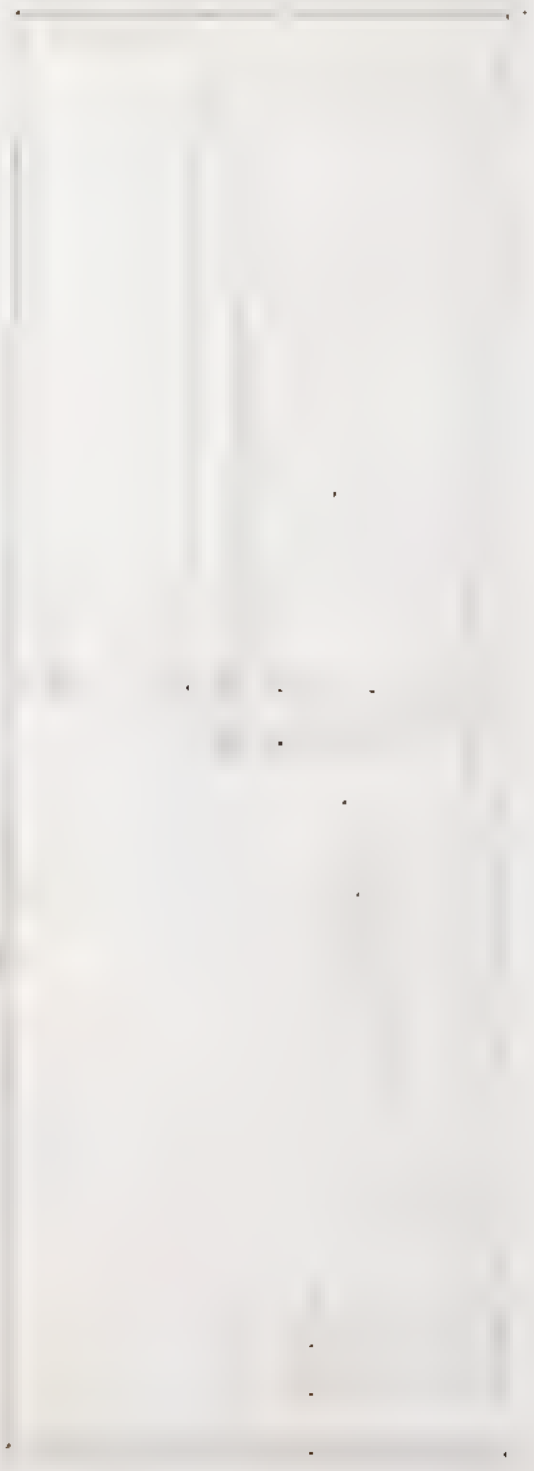


Fig. 12.

Fig. 13.



Tav. VII.

Fig. 14.

Fig. 15.

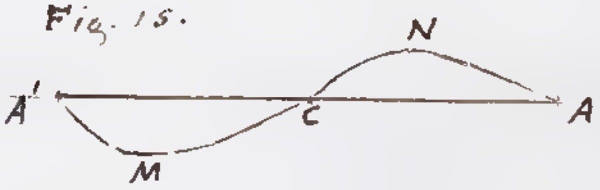


Fig. 16.

Tav. VIII

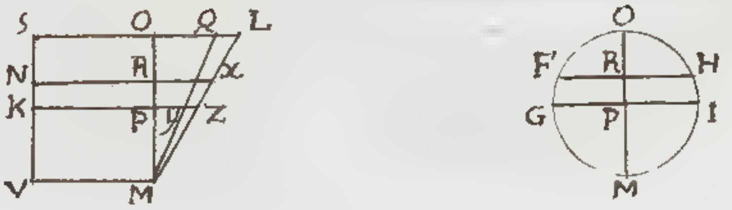
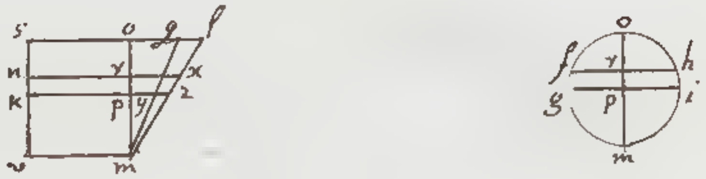


Fig. 17.



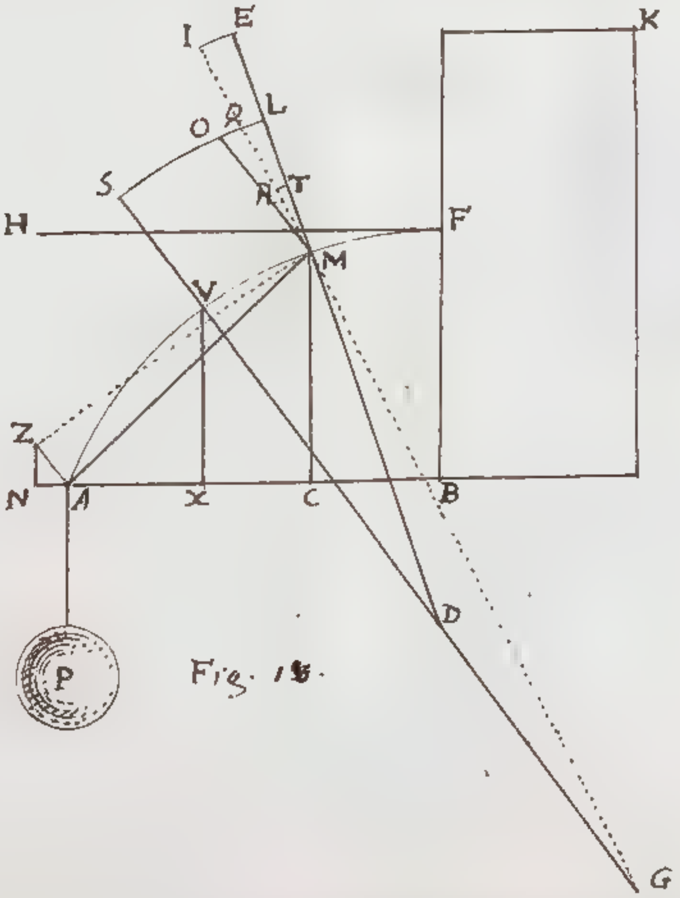


Fig. 18.

Tav. IX.

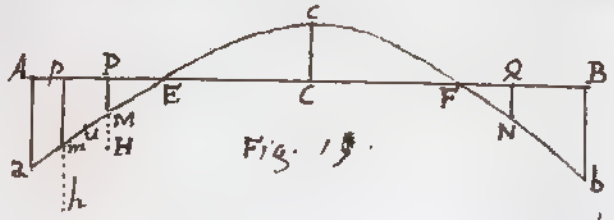


Fig. 19.

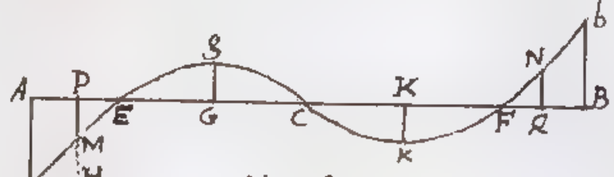


Fig. 20.

Fig. 21.

Fig. 22.

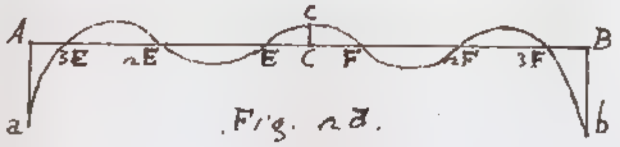


Fig. 23.

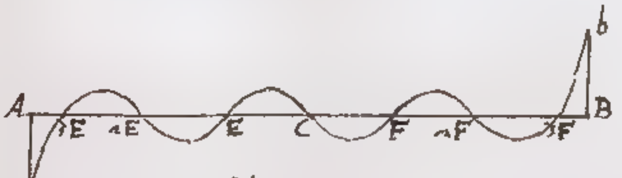


Fig. 24.

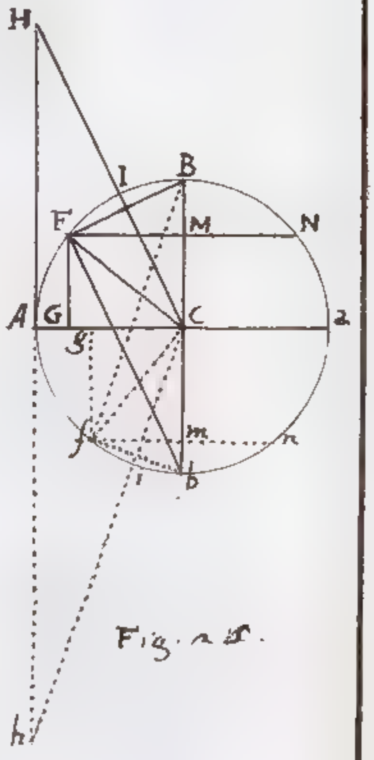


Fig. 25.

Tav. X.

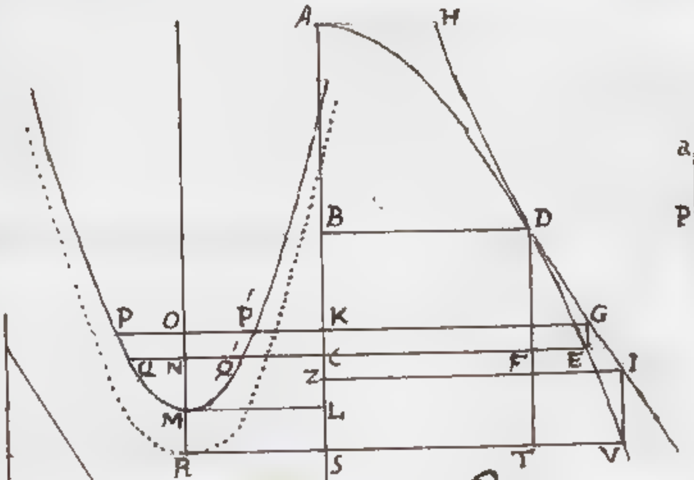


Fig. 26.

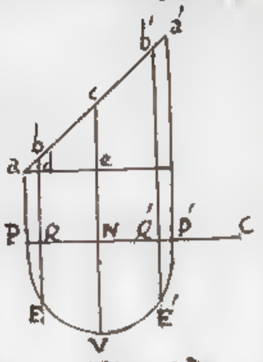


Fig. 27.

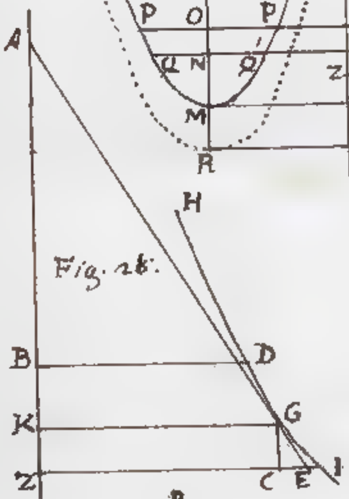


Fig. 28.

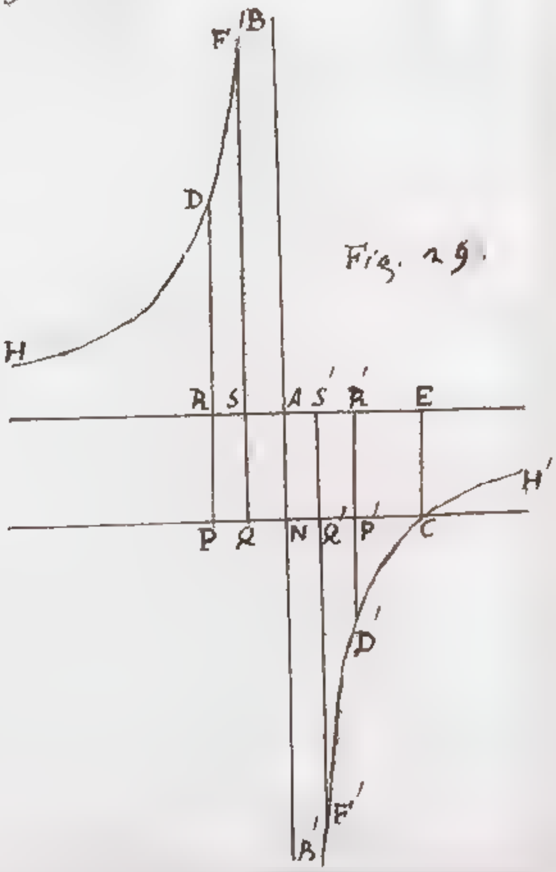


Fig. 29.

Fig. 30.

Tav. XI.

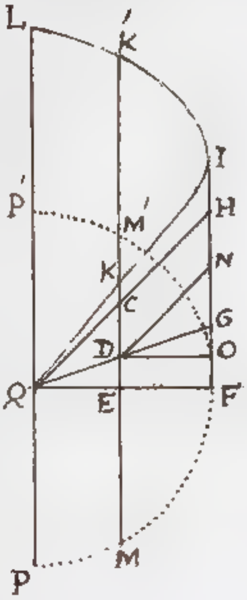


Fig. 31.

Fig. 32.

Fig. 33.

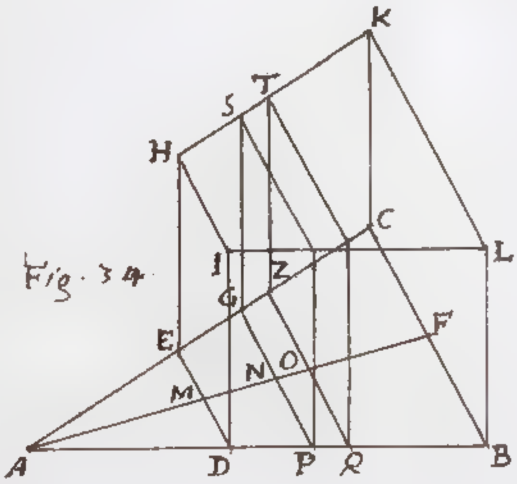
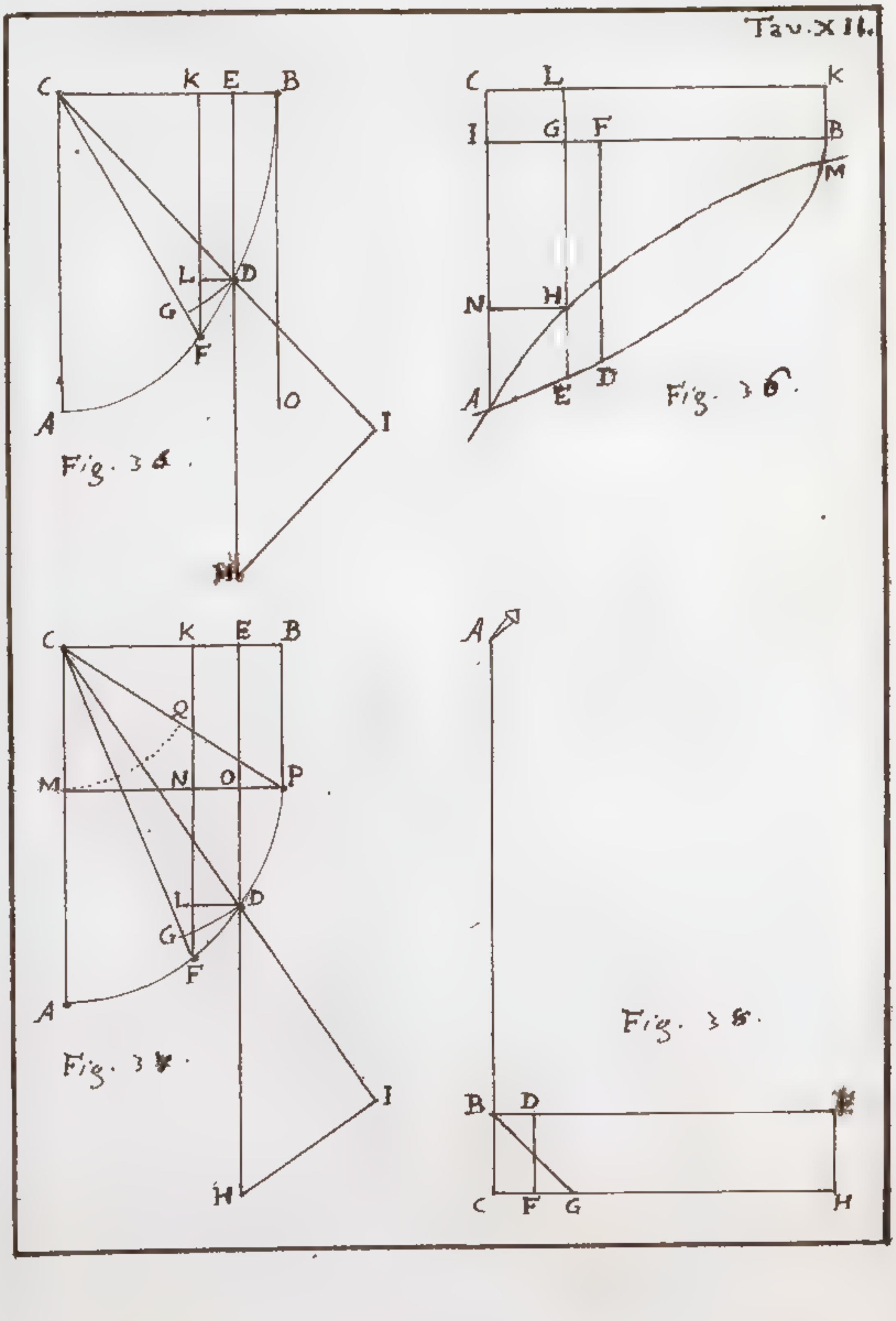


Fig. 34.


Tav. XII.
Fig. 36.